

Euclid Elem.
**EUCLIDIS
ELEMENTORUM**

LIBRI PRIORES SEX,

ITEM

UNDECIMUS & DUODECIMUS.

Ex Versione Latina

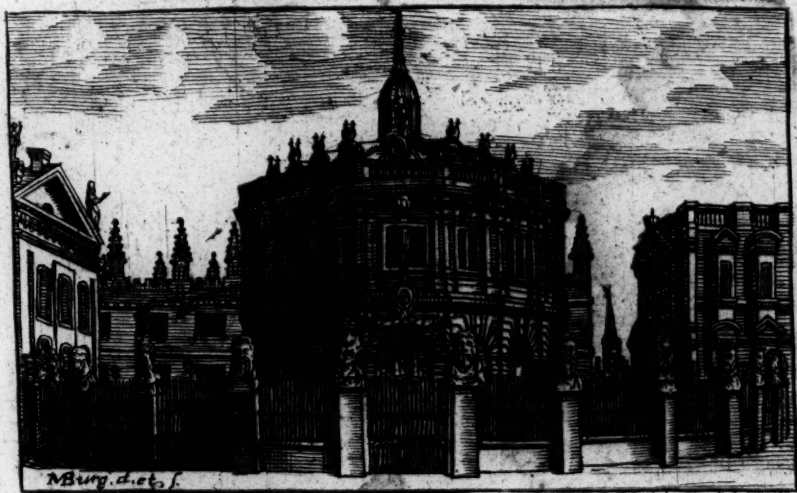
FEDERICI COMMANDINI.

QUIBUS ACCEDUNT

Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ Elementa.

Item Tractatus de Natura & Arithmetica Logarithmorum.

In usum Juventutis Academicæ.



OXONIÆ.

E THEATRO SHELDONIANO, MDCCXXIII.

Impensis Rich. Clements Bibliop. Oxon.

Prostat apud J. Knapton & C. Rivington Bibliop. in Cœmiterio D. Pauli Lond.

Imprimatur,

BER. GARDINER

Vic. Can. OXON.

March 25. 1715.



PRÆFATIO.

POST tot nova Geometriæ Elementa, non ita pridem in lucem emissa, est fortasse quod miretur Tyro Mathematicus, annosa hæc, & (ut quibusdam videntur) obsoleta Euclidis *στοιχεῖα* è prelo denuo prodire: præsertim cum non pauca in illis vitia detexisse sibi visi sint, qui Geometriam Elementarem novâ quadam methodo excolendam proponunt. Hi enim Lyncei Philosophi Euclidis Definitiones parum perspicuas, demonstrationes vix evidentes, res omnes malo ordine dispositas, aliasque mendas innumeras, per omnem antiquitatem ad sua usque tempora latentes, se invenisse jactant.

At tantorum virorum pace, audacter asserto, Euclidem ab iis immerito reprehensum esse, ejusque Definitiones distinctas & claras, è primis principiis & conceptibus nostris faciliorem & simplicioribus petitas esse; demonstrationes Elegantes perspicuas & concinnas; ratiocinandi vim adeo evidentem & nervosam, ut facile inducar credere obscuritatem istam à sciolis illis toties insimulatam, confusis potius & perplexis eorum ideis, quam demonstrationibus ipsis imputandum esse. Et utcunque nonnulli quærantur de malâ rerum dispositione, & iniquo ordine, quem tenet Euclides; aliam tamen methodum magis idoneam, & discipulis faciliorem inter omnia hoc genus scripta invenio nullam.

*Non meum est hîc loci hypercriticis Horum capti-
unculis sigillatim respondere: sed in his Elementis
vel mediocriter versato, statim patebit, Calumniato-
res hos suam potius oscitantiam monstrare, quam
veros in nostro authore lapsus arguere; imo ne hoc
quidem dicere vereor, quod vix, & ne vix quidem
unum, aut alterum è tot novis systematibus inveniri
potest, in quibus plures non sunt labe, imo fœdiores
paralogismi, quam in Euclidem vel fingere potuerunt.*

*Post tot infelices in Geometriâ reformandâ cona-
tus, quidam non infimi Geometræ Elementa de
novo construere non ausi, ipsum Euclidem omnibus
aliis Elementorum Scriptoribus merito prætulerunt,
eique edendo suas curas impenderunt; hi tamen
ipsi nescio quibus opinionibus ducti, alias proposi-
tiones prorsus omittunt, aliarumque demonstrationes
in pejus mutant. Inter illos eminent Tacquetus &
Deschalles, quorum utrique malo quodam fato con-
tigit, ut elegantes quasdam & in Elementis optimo
jure ponendas propositiones quasi ineptas & inutiles
rejecerint, quales sunt propositiones 27, 28, 29. li-
bri sexti, cum aliis nonnullis quarum usus fortasse
illos latebat. Insuper quandocunque ipsas Eulidis
demonstrationes deserunt, multum in argumentando
peccant, & à concinnitate Veterum recedunt.*

*In libro quinto demonstrationes Euclidis in to-
tum repudierunt, & Proportionis definitionem aliis
terminis conceptam attulerunt; at quæ unam tan-
tum è duabus proportionalium speciebus comprehen-
dit, & quantitatibus commensurabilibus solummodo
competit: nihilominus suas, quæ sunt de proportionem,
demonstrationes omni quantitati tam incommensu-
rabilis quam commensurabilis in sequentibus libris ap-
plicant.*

plicant. Hunc tam turpem lapsum nec Logici nec Geometrae facile condonassent, nisi hi authores in alijs suis scriptis de Scientiis Mathematicis bene meruissent. Hoc quidem commune est iis vitium cum omnibus hodiernis Elementorum Scriptoribus, qui in eundem impingunt scopulum, & ut suam in hac materia ostendent peritiam, authorem nostrum in re minime culpandâ imo laudandâ reprehendunt; Quantitatum proportionalium definitionem intelligo: in quâ intellectu facilem proportionalium proprietatem exponit, quæ quantitatibus omnibus tam incommensurabilibus quam commensurabilibus æque convenit, & à quâ cæteræ omnes proportionalium proprietates facile consequuntur.

Hujus proprietatis demonstrationem in Euclide desiderant Egregii hi Geometrae, atque defectum demonstratione suâ supplendum suscipiunt. Hic iterum contemplari licet insignem eorum in Logicâ peritiam, qui definitionis nominis demonstrationem expectant: talis enim est hæc Euclidis definitio; qui illas quantitates proportionales vocat, quæ conditiones in definitione suâ allatas obtinent. Quidni primo Elementorum auctori licebat, quælibet nomina quantitatibus hæc requisita habentibus, arbitrio suo affigere? Licebat proculdubio; suo igitur utitur jure, & eas proportionales vocat.

Sed operæ pretium erit, methodum, quâ hanc proprietatem demonstrare conantur, perpendere. Affectionem quandam uni tantum proportionalium generi, viz. commensurabilium, congruentem assumunt; & exinde multis ambagibus longâque conclusionum serie universalem, quam Euclides posuit, proportionalium proprietatem deducunt; quod certe tam methodo
quam

quam argumentationis regulis satis alienum esse videtur. At longe rectius fecissent, si proprietatem universalem ab Euclide assignatam primo posuissent, & exinde particularem illam & uni tantum proportionalium speciei congruentem deduxissent. Quoniam vero hanc respuerunt methodum, talem demonstrationem ad definitiones libri quinti attexere libuit. Qui Euclidem ulterius defensum videre cupiunt, consulant eruditas & summo judicio conscriptas Lectiones Mathematicas Cl. Barovii an. 1666.

Cum vero tanti Geometrae incidit mentio, praetere non possum Elementa ab eo edita, in quibus plerumque ipsius Euclidis constructiones & demonstrationes retinet, ne unâ quidem omiſsa propositione. Hinc oritur major in demonstrando vis, pulchrior construendi methodus, & ubique Veterum Geometrarum genius clarius elucit, quam in libris istius generis fieri solet. Plura praeterea Corollaria & Scholia adjecit, non modo breviori sequentium demonstrationi inservientia, verum etiam aliis in rebus perutilia.

Nihilominus, demonstrationes ejus eâ brevitate laborant, tot symbolis notisque implicantur, ut in Geometriâ parum versato difficiles & obscurae fiant. Multae propositiones quae ipsum Euclidem legenti perspicuae viderentur, Algebraicâ hac demonstrandi methodo tyronibus nodosae & vix intelligibiles redduntur; qualis est V. G. 13. primi Elementi. Demonstrationum, quas in Elemento secundo attulit, difficilis admodum tyronibus est intelligentia; rectius multo Euclides ipse earum evidentiam (ut in re Geometricâ fieri debet) à figurarum contemplatione petit. Scientiarum omnium Elementa simplicissimâ
methodo

66.
vi-
tem
ent,
bor-
Quo-
on-
li-
cu-
cri-
66.
ter-
ple-
tra-
one.
rior
tra-
tius
&
de-
re-
tate
t in
ant.
ber-
ndi
red-
De-
ulit,
tius
Geo-
ione
imâ
bodo

methodo tradenda sunt, nec symbolis nec notis nec obscuris principiis aliunde petitis involvenda.

Ut Elementa Barovii nimia brevitate, sic ea, quæ à Clavio traduntur, molestâ prolixitate peccant. Scholiis enim Commentariisque abundat nimis & luxuriat. Vix equidem arbitror Euclidem tam obscurum esse, ut tantâ farragine notarum indigeat; nec dubito quin tyrones omnes Euclidem ipsum omnibus suis Commentatoribus faciliorem inventuri sint. In demonstrationibus Geometricis ut nimia brevitâs tenebras parit, sic nimia verbositas plus tædii & confusionis quam lucis affert.

Hisce præcipue inductus rationibus, prima sex Euclidis Elementa cum undecimo & duodecimo, ex versione Frederici Commandini in usum Juventutis Celeberrimæ hujus Academiæ per se edenda curavi; à cæteris abstinui, tum quia hæc, quæ jam damus, ad alias plerasque Matheseos partes, quæ nunc vulgo traduntur, intelligendas, sufficient, tum etiam quia omnia Euclidis opera, Græce & Latine nitidissimis Characteribus adornata summaque cura & fide emendata nuper è prælo Academico prodire.

Porro in gratiam eorum, qui Geometriam Elementarem ad Praxes vitæ commodis inservientes applicare desiderant, Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ compendium adjunxi, cujus Artis ope, magnitudines Geometricæ mensurantur, ipsarumque dimensiones numeris subjiciuntur.



E

I

tu

ge
in

ri

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

I.

Punctum est, cujus nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero est longitudo latitudinis expers.

III.

Lineæ termini sunt puncta.

IV.

Recta linea est, quæ ex æquo suis interjicitur punctis.

V.

Superficies est id, quod longitudinem, & latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei termini sunt lineæ.

VII.

Plana superficies est quæ ex æquo suis interjicitur lineis.

VIII.

Planus angulus est duarum linearum in plano sese contingentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

IX.

Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

A

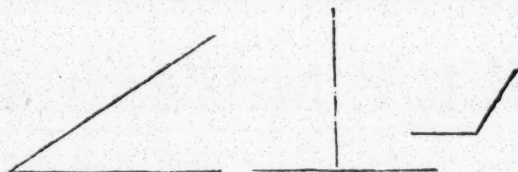
X.

X.

Cum vero recta linea super rectâ lineâ insitens, eos, qui deinceps sunt angulos, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum: & quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.

XI.

Obtusus angulus est, qui major est recto.



XII.

Acutus autem, qui recto est minor.

XIII.

Terminus est, quod alicujus extremum est.

XIV.

Figura est, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus est figura plana, una linea contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab uno puncto intra figuram existente omnes rectæ lineæ pertingentes sunt æquales.

XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

XVII.

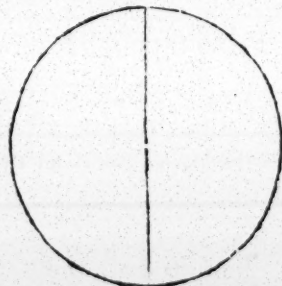
Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem, & bifariam circulum fecat.

XVIII.

Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipsa circuli circumferentia intercipitur.

XIX.

Segmentum circuli est figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



XX.

XX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

Quadrilateræ, quæ quatuor.

XXIII.

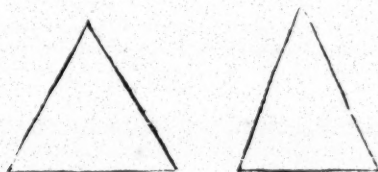
Multilateræ vero, quæ pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Isoceles, five æquicrure, quod duo tantum æqualia latera habet.

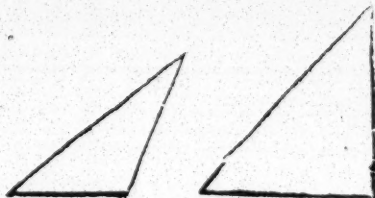


XXVI.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.



XXVIII.

Obtusangulum est, quod obtusum habet angulum.

XXIX.

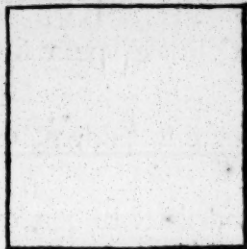
Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

A 2

XXX.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum est, quod & æquilaterum est, & rectangulum.



XXXI.

Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem æquilatera vero non est.

XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

XXXIII.

Rhomboides, quæ, & opposita latera, & oppositos angulos inter se æquales habens, neque æquilatera est, neque rectangula.



XXXIV.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelæ, seu æquidistantes rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex utraque parte in infinitum producuntur, in neutram partem inter se conveniunt.

POSTULATA.

I.

Postuletur à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam, in continuum & directum producere.

III.

Quovis centro, & intervallo circulum describere.

AXIOMATA.

AXIOMATA.

I.

Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

II.

Et si æqualibus æqualia adjiciantur tota sunt æqualia.

III.

Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.

IV.

Et si inæqualibus æqualia adjiciantur, tota sunt inæqualia.

V.

Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.

VI.

Et quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.

VII.

Et quæ ejusdem dimidia sunt, inter se sunt æqualia.

VIII.

Et quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia.

IX.

Totum est sua parte majus.

X.

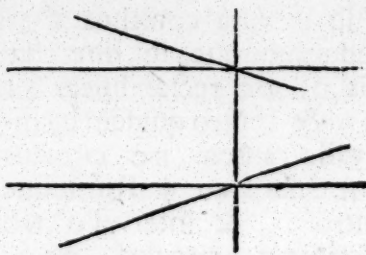
Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter se æquales sunt.

XII.

Et si in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectæ lineæ illæ in infinitum productæ, inter se conveniunt ex ea parte, in qua sunt anguli duobus rectis minores.

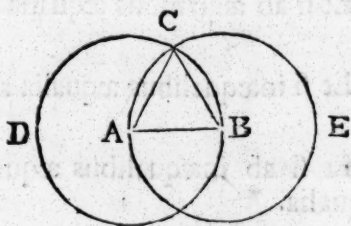


Not. Cum plures anguli ad unum punctum existunt, designatur quilibet tribus literis, quarum illa quæ est ad verticem anguli, in medio ponitur. V.G. in figura Prop. 13. libri primi angulus à rectis AB, BC comprehensus dicitur angulus ABC, & angulus à rectis AB, BE contentus dicitur angulus ABE.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super datâ rectâ lineâ terminatâ, triangulum æquilaterum constituere.

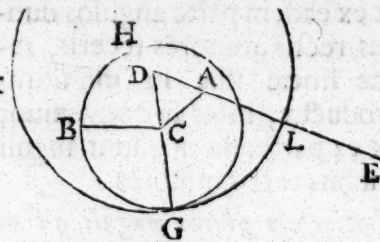
Sit data recta linea terminata AB , oportet super ipsa AB triangulum æquilaterum constituere. Centro quidem A intervallo autem AB circulus describatur BCD^a . Et rursus centro B , intervalloque BA describatur circulus ACE^a , & à puncto C , in quo circuli se invicem secant, ad AB ducantur rectæ lineæ CA CB^b . Quoniam igitur A centrum est circuli DBC , erit AC ipsi AB^c æqualis, rursus quoniam B circuli CAE est centrum, erit BC æqualis BA : ostensa est autem & CA æqualis AB . utraque igitur ipsarum CA CB ipsi AB est æqualis. Quæ autem eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt. Ergo CA ipsi CB est æqualis. tres igitur CA AB BC inter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est ABC , & constitutum est super data recta linea terminata AB . quod fecisse oportebat.



PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

Sit datum quidem punctum A , data vero recta linea BC . oportet ad A punctum, ipsi BC rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. Ducatur à puncto A ad C recta linea AC^a : & super ipsâ constituatur triangulum æquilaterum DAC^b . producanturque in directum ipsis DA DC rectæ lineæ AE CG^c . & centro quidem C , intervallo autem BC circulus BGH describatur d . Rursusque centro D , & intervallo DG describatur circulus GKL . Quoniam igitur punctum C centrum est BGH circuli, erit BC ipsi CG^e æqualis e . Et rursus quoniam D centrum est circuli GKL , erit DL æqualis DG : quarum DA est æqualis f Axiom. 3. DC . reliqua igitur AL reliquæ GC est æqualis f . Ostensa autem

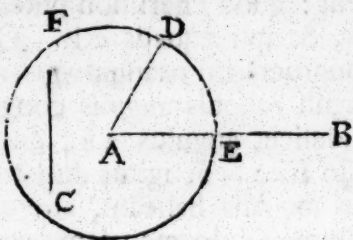


autem est BC æqualis CG . Quare utraque ipsarum AL BC est æqualis ipsi CG . Quæ autem eidem æqualia sunt, & inter se sunt æqualia. Ergo, & AL est æqualis BC . Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC æqualis posita est AL . Quod facere oportebat.

PROP. III. PROBL.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à majore minori æqualem abscindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB & C ; quarum major sit AB . oportet a majore AB minori C æqualem rectam lineam abscindere. Ponatur ad A punctum ipsi C æqualis recta linea AD ^a, & centro quidem A , intervallo autem AD circulus describatur DEF ^b. Et quoniam A centrum est DEF circuli, erit AE ipsi AD æqualis. Sed & C æqualis AD . Utraque igitur ipsarum AE , C ipsi AD æqualis erit. Quare & AE ipsi C est æqualis c . Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus AB & C à majore AB minori C æqualis Abscissa est: Quod fecisse oportebat.



^a Per antecedentem.

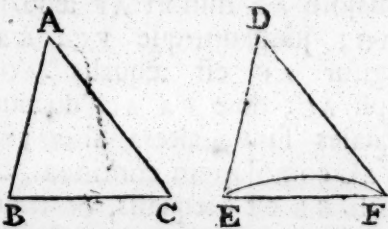
^b Post. 3.

^c Axiom. 1.

PROP. IV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continentur: Et basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF , quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB lateri DE æquale, latus vero AC ipsi DF ; & angulum BAC angulo EDF æqualem. Dico, & basim BC basi EF æqualem esse, & triangulum ABC æquale triangulo DEF , & reliquos angulos reliquis angulis æ-



æquales, alterum alteri, quibus æqualia latera subtenduntur; nempe angulum ABC angulo DEF : & angulum ACB angulo DCE . Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF , & puncto quidem A posito in D , recta vero linea AB in ipsa DE : & punctum B puncto E congruet; quod AB ipsi DE sit æqualis. Congruente autem AB ipsi DE ; congruet & AC recta linea rectæ lineæ DF cum angulus BAC sit æqualis angulo EDF . Quare, & C congruet ipsi F : est enim recta linea AC æqualis rectæ DF . Sed, & punctum B congruebat puncto E . Ergo, & basis BC basi EF congruet. Nam si puncto quidem B congruente ipsi E , C vero ipsi F ; basis BC basi EF non congruit; duæ rectæ lineæ spatium comprehendent: quod fieri non potest. Congruet igitur BC basis, basi EF , & ipsi æqualis erit. Quare & totum ABC triangulum congruet toti triangulo DEF , & ipsi erit æquale; & reliqui anguli reliquis angulis congruent, & ipsis æquales ^b erunt. Videlicet angulus ABC angulo DEF , & angulus ACB angulo DCE . Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continentur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: quod ostendere oportebat.

^a Ax. 10.

^b Axiom. 8.

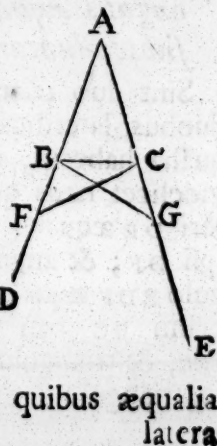
PROP. V. THEOR.

Isocelium triangulorum qui ad basim sunt anguli inter se sunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli qui sunt sub basi inter se æquales erunt.

Sit isosceles triangulum ABC ; habens AB latus lateri AC æquale, & producantur in directum ipsis AB AC rectæ lineæ BD CE . Dico angulum quidem ABC angulo ACB , angulum vero CBD angulo BCE æqualem esse. Sumatur enim in linea BD , quodvis punctum F ; atque à majore AE minori AF æqualis ^a auferatur AG ; junganturque FC , GB . Quoniam igitur AF est æqualis AG ; AB vero ipsi AC ; duæ FA AC , duabus GA AB æquales sunt, altera alteri; & angulum FAG communem continent, basis igitur FC basi GB est ^b æqualis, & triangulum AFC æquale triangulo AGB ; & reliqui anguli, reliquis angulis æquales erunt, alter alteri; quibus æqualia latera

^a 3. hujus.

^b 4. hujus.



latera subtenduntur: Videlicet angulus quidem ACF æqualis angulo ABG ; angulus vero AFC angulo AGB . Et quoniam tota AF toti AG est æqualis; quarum AB est æqualis AC ; erit c & reliqua BF reliquæ CG æqualis. Ostensa est c Axiom. 3. autem FC æqualis GB . duæ igitur BF , FC duabus CG GB æquales sunt, altera alteri; & angulus BFC æqualis angulo CGB : estque basis ipsorum BC communis. Ergo & triangulum BFC triangulo CGB æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur. Angulus igitur FBC est æqualis angulo GCB ; & angulus BCF angulo CBG . Itaque quoniam totus ABG angulus toti angulo ACF æqualis ostensus est, quorum angulus CBG est æqualis ipsi BCF : erit reliquus d ABC reliquo d Axiom. 3. ACB æqualis; & sunt ad basim ABC trianguli: ostensus autem est & FBC angulus æqualis angulo GCB ; qui sunt sub basi. Isoscelium igitur triangulorum, qui ad basim sunt anguli inter se sunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli, qui sunt sub basi, inter se æquales erunt. Quod ostendisse oportebat.

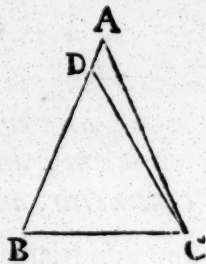
Cor. Hinc omne triangulum æquilaterum est quoque æquiangulum.

PROP. VI. THEOR.

Si trianguli duo anguli inter se sint æquales, & æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt.

Sit triangulum ABC , habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico & AB latus lateri AC æquale esse: Si enim inæqualis est AB ipsi AC ; altera ipsarum est major. Sit major AB ; atque à majori AB minori AC æqualis a auferatur DB ; & DC jungatur. Quoniam igitur DB est æqualis ipsi AC ; communis autem BC : erunt duæ DB BC duabus AC CB æquales, altera alteri; & angulus DBC æqualis angulo ACB ex hyp. Basis igitur DC basi AB est b æqualis, & triangulum DBC æquale triangulo ACB , minus majori; quod est absurdum. Non igitur inæqualis est AB ipsi AC . Ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter se sint æquales, & æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt: quod monstrasse oportuit.

Cor. Hinc omne triangulum æquiangulum est quoque æquilaterum.



a 3. hujus.

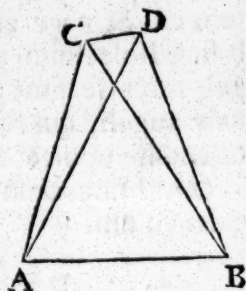
b 4. hujus.

PRO-

PROP. VII. THEOR.

In eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.

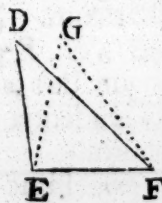
Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB duabus eisdem rectis lineis AC CB , aliæ duæ rectæ lineæ AD DB æquales, altera alteri constituentur ad aliud atque aliud punctum C & D ; ad easdem partes ut ad C & D , eosdem habentēs terminos A & B , quos primæ rectæ lineæ, ita ut CA quidem sit æqualis DA , eundem, quem ipsa terminum, habens A ; CB vero sit æqualis DB , eundem habens B terminum; & CD jungatur. Itaque quoniam AC est æqualis AD ; erit, & angulus ACD angulo ADC æqualis a . Major igitur est ADC angulus angulo BCD . Quare angulus BDC angulo BCD multo major erit. Rursus quoniam CB est æqualis DB & angulus BDC æqualis erit angulo BCD : ostensus autem est ipso multo major; quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes; quod ostendisse oportebat.



PROP. VIII. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & basim basi æqualem; angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur, angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC , DEF , quæ duo latera AB , AC , duobus lateribus DE DF æqualia habeant alterum alteri; ut sit AB quidem æquale DE ; AC vero ipsi DF ; habeant autem, & basim BC basi EF æqualem.



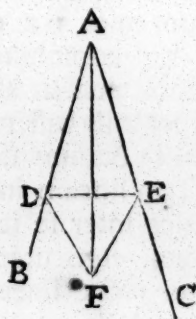
Dico

Dico angulum quoque BAC angulo EDF æqualem esse. Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF triangulo, & puncto quidem B posito in E ; recta vero linea BC in EF : congruet & C punctum puncto F , quoniam BC ipsi EF est æqualis. Itaque congruente BC ipsi EF ; congruent & BA AC ipsis ED DF . si enim basis quidem BC basi EF congruit; latera autem BA AC lateribus ED DF non congruunt, sed situm mutant; ut EG GF : constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud atque aliud punctum; ad eandem partes; eosdem habentes terminos. non constituuntur autem; ut demonstratum ^a est. non igitur, si basis BC congruit basi EF , ^a per 7. hujus. non congruent & BA AC latera lateribus ED DF . congruent igitur. Quare & angulus BAC angulo EDF congruet, & ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & basim basi æqualem: angulum quoque æqualibus lateribus contentum angulo æqualem habebunt: quod demonstrare oportebat.

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Sit datus angulus rectilineus BAC ; itaque oportet ipsum bifariam secare. Sumatur in linea AB quodvis punctum D ; & à linea AC ipsi AD æqualis ^a auferatur AE ; junctaque DE constituatur super ea triangulum æquilaterum DEF ; & AF jungatur. Dico angulum BAC à recta linea AF bifariam secari. Quoniam enim AD est æqualis AE ; communis autem AF : duæ DA AF duabus EA AF æquales sunt, altera alteri; & basis DF æqualis basi EF . angulus ^c igitur DAF angulo EAF est æqualis. quare datus angulus rectilineus BAC à recta linea AF bifariam sectus est; quod facere oportebat.



^a 3. hujus.

^b 1. hujus.

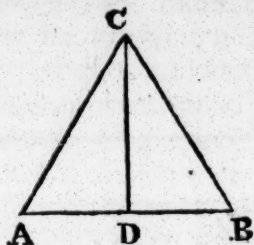
^c 8. hujus.

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

Sit data recta linea terminata AB ; oportet ipsam AB bifariam secare. constituatur super ^a ea triangulum æquilaterum ABC ; ^a 1. hujus. &

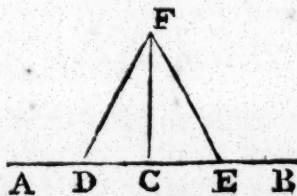
- b* 9. hujus. & secetur ACB angulus *b* bifariam recta linea CD . Dico AB rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim AC est æqualis CB ; communis autem CD ; duæ ACD duabus BCD æquales sunt; altera alteri; & angulus ACD æqualis angulo BCD . basis igitur AD basi BD est æqualis. Et ob id recta linea terminata AB bifariam secta est in puncto D : quod facere oportebat.



PROP. XI. PROBL.

Data rectæ lineæ à puncto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

- Sit data recta linea AB , & datum in ipsa punctum C . oportet à puncto C ipsi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in AC quodvis punctum D : ipsique CD æqualis *a* ponatur CE , & super DE constituitur *b* triangulum æquilaterum FDE , & FC jungatur. Dico datae rectæ lineæ AB à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse FC . Quoniam enim DC est æqualis CE , & FC communis; erunt duæ DC CF duabus EC CF æquales, altera alteri; & basis DF est æqualis basi FE . angulus igitur DCF angulo ECF est æqualis, & sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insitens, eos qui deinceps sunt, angulos æquales inter se fecerit; rectus *d* est uterque æqualium angulorum. ergo uterque ipsorum DCF FCE est rectus. Datae igitur rectæ lineæ AB à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est FC recta linea. Quod fecisse oportuit.

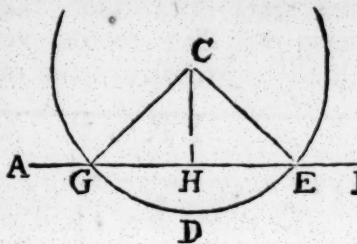


PROP. XII. PROBL.

Super data recta linea infinita, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita AB , datum vero punctum C , quod in ea non est. Oportet super data recta linea

linea infinita AB , à dato puncto C , quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius AB rectæ lineæ quodvis punctum D : & centro quidem C , intervallo autem CD circulus ^a describatur EDG : & EG in H bifariam ^b secetur: junganturque CG CH



^a Postul. 3.
^b 10. hujus.

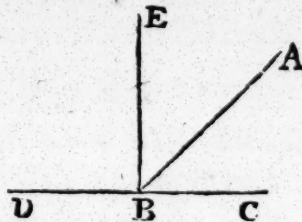
CE , Dico super data recta linea infinita AB , à dato puncto C , quod in ea non est, perpendicularem CH ductam esse. Quoniam enim æqualis est GH ipsi HE , communis autem HC , duæ GH HC , duabus EH HC æquales sunt, altera alteri; & basis CG est æqualis basi CE . Angulus igitur CHG angulo CHE est ^c æqualis, & sunt deinceps. cum autem recta ^c 8. hujus. linea super rectam lineam insistent, eos qui deinceps sunt angulos, æquales inter se fecerit; rectus ^d est uterque æqualium ^d Def. 10. angulorum & quæ insitit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui insitit. ergo super data recta linea infinita AB à dato puncto C , quod in ea non est, perpendicularis ducta est CH . Quod facere oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea quædam AB super rectam CD consistens angulos faciat CBA ABD . Dico CBA ABD angulos vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales; si enim CBA est

æqualis ipsi ABD ; duo recti ^a sunt; sin minus, ducatur à puncto B ipsi CD ad rectos ^b angulos BE . anguli igitur CBE EBD sunt duo recti. Et quoniam CBE , duobus CBA ABE est æqualis, communis apponatur EBD : ergo anguli CBE



^a Def. 10.

^b 11. hujus.

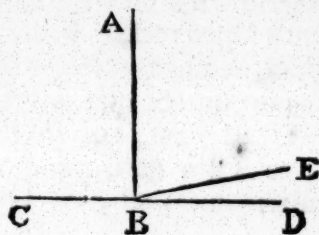
EBD tribus angulis CBA ABE EBD sunt ^c æquales. Rursus ^c Axiom. 2. quoniam DBA angulus est æqualis duobus DBE EBA , communis apponatur ABC . anguli igitur DBA ABC tribus DBE EBA ABC æquales sunt. At ostensum est angulos quoque CBE EBD eidem tribus æquales esse: quæ vero eidem sunt æqualia, ^d & inter se æqualia sunt: ergo & anguli CBE EBD ^d Axiom. 1. ipsis DBA ABC sunt æquales, suntque CBE EBD duo recti anguli

anguli, igitur $\angle DBA$ $\angle ABC$ duobus rectis æquales erunt. ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIV. THEOR.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam enim rectam lineam AB , atque ad punctum in ea B , duæ rectæ lineæ BC BD non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, $\angle ABC$ $\angle ABD$ duobus rectis æquales faciant. Dico BD ipsi CB in directum esse. si enim BD non est in directum ipsi CB , sit ipsi CB in directum BE . Quoniam igitur recta linea AB super rectam CBE consistit; anguli $\angle ABC$ $\angle ABE$ a duobus rectis sunt æquales. Sed & anguli $\angle ABC$ $\angle ABD$ sunt æquales duobus rectis. Anguli igitur $\angle CBA$ $\angle ABE$ ipsis $\angle CBA$ $\angle ABD$ æquales erunt. Communis auferatur $\angle ABC$. Ergo reliquus $\angle ABE$ reliquo $\angle ABD$ est æqualis, minor majori quod fieri non potest. Non igitur BE est in directum ipsi BC . Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter BD . Ergo CB ipsi BD in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. Quod demonstrare oportebat.

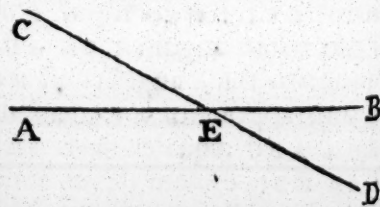


a 13. hujus.

PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD se invicem secant in puncto E . Dico angulum quidem $\angle AEC$ angulo $\angle DEB$; angulum vero $\angle CEB$ angulo $\angle AED$ æqualem esse. Quoniam enim recta linea AE super rectam CD con-



a 13. hujus. sistens angulos facit $\angle CEA$ $\angle AED$; erunt hi a duobus rectis æquales

æquales. Rursus quoniam recta linea DE super rectam AB consistens facit angulos AED DEB; erunt AED DEB anguli æquales a duobus rectis. Ostensum autem est angulos quoque CEA AED duobus rectis esse æquales. Anguli igitur CEA AED angulis AED DEB æquales sunt. Communis auferatur AED. Ergo reliquus b CEA reliquo BED est æqua- b Axiom. 3.
lis. Simili ratione, & anguli CEB DEA æquales ostenduntur. Si igitur duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. Quod ostendere oportebat.

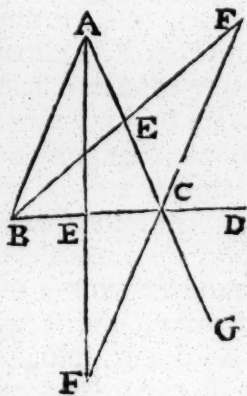
Cor. 1. Ex hoc manifeste constat duas rectas lineas se invicem secantes, facere angulos ad sectionem quatuor rectis æquales.

Cor. 2. Omnes anguli circa unum punctum constituti constituunt angulos quatuor rectis æquales.

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & opposito est major.

Sit triangulum ABC, & unum ipsius latus BC ad D producat. Dico exteriorem angulum ACD utrovis interiore, & opposito, videlicet CBA, & BAC majorem esse. Secetur enim AC bifariam a in E, & juncta BE producat ad F; ponaturque ipsi BE æqualis EF. Jungatur præterea FC, & AC ad G producat. Quoniam igitur AE quidem est æqualis EC, BE vero ipsi EF, duæ AEB duabus CEF æquales sunt, altera alteri: & angulus AEB angulo FEC est æqualis b, ad verticem enim sunt. Basis igitur AB æqualis c est basi FC; & AEB triangulum triangulo FEC & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus BAE est æqualis angulo ECF. Sed ECD angulus major est ipso ECF. Major igitur est angulus ACD angulo BAE. Similiter recta linea BC bifariam secta, ostendetur etiam BCG angulus, hoc est ACD angulus angulo ABC major. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & opposito major est. Quod oportebat demonstrare.



a 10. hujus.

b 15. hujus.

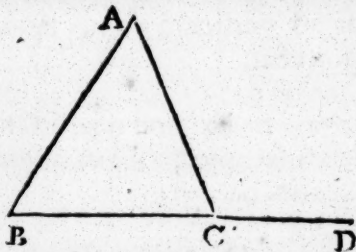
c 4. hujus.

PROPO.

PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

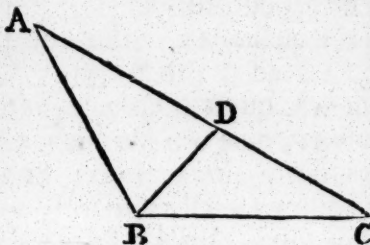
Sit triangulum ABC . Dico ipsius ABC trianguli duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse. Producatur enim BC ad D . Et quoniam trianguli ABC exterior angulus ACD major ^a est interiore, & opposito ABC : communis apponatur ACB . Anguli igitur ACD ACB angulis ABC ACB majores sunt. ^b Sed ACD ACB sunt ^b æquales duobus rectis. Ergo ABC BCA duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque BAC ACB itemque CAB ABC duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt; quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XVIII. THEOR.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB majus. Dico, & ABC angulum angulo BCA majorem esse. Quoniam enim AC major est, quam AB , ponatur ipsi AB æqualis AD ; & BD jungatur. Et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB , erit is major ^a interiore, & opposito DCB . ^b Sed ADB æqualis ^b est ipsi ABD , quod & latus AB lateri AD sit æquale, major igitur est & ABD angulus angulo ACB quare ABC ipso ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum subtendit: quod oportebat demonstrare.



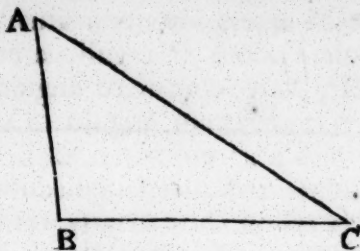
PROP. XIX. THEOR.

Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.

Sit triangulum ABC majorem habens ABC angulum angulo BCA . Dico & latus AC latere AB majus esse. Si enim

non

non est majus, vel AC est æquale ipsi AB, vel ipso minus, æquale igitur non est, nam & angulus ABC angulo ACB æqualis *a* esset; non est autem. Non igitur AC ipsi AB est æquale. Sed neque minus. esset enim & angulus ABC angulo ACB minor *b*. atqui non est, non igitur AC minus est ipso AB. Oñsum autem est neque æquale esse: ergo AC ipso AB est majus. Omnis igitur trianguli major angulus majus latus subtendit. Quod oportebat demonstrare.



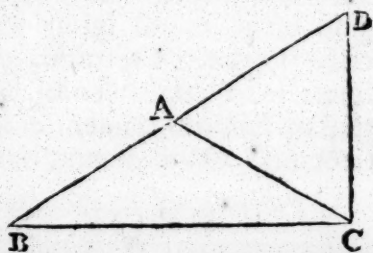
a 5. hujus.

b 18. hujus.

PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum ABC. Dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta: videlicet latera quidem BA AC majora latere BC; latera vero AB BC majora latere AC; & latera BC CA majora ipso AB. producat enim BA ad punctum D; ponaturque ipsi CA æqualis AD^a; & DC jungatur. quoniam igitur DA est æqualis AC erit & angulus ADC angulo ACD æqualis *b*. B



a 3. hujus.

b 5. hujus.

Sed BCD angulus major est angulo ACD. Angulus igitur BCD angulo ADC est major; Et quoniam triangulum est DCB habens BCD angulum majorem angulo BDC; majorem autem angulum majus latus subtendit *c*: erit latus DB latere BC majus. sed DB est æquale ipsis BA AC. quare latera BA AC ipso BC majora sunt. similiter ostendemus, & latera quidem AB BC majora esse latere CA: latera vero BC CA ipso AB majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta. Quod ostendere oportebat.

c 19. hujus.

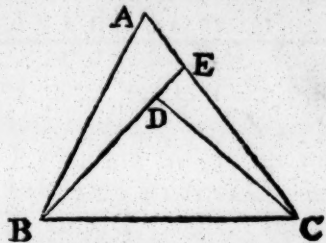
PROP. XXI. THEOR.

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituentur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

B

Trian-

Trianguli enim ABC in uno latere BC à terminis B & C duæ rectæ lineæ intra constituentur BD & DC . Dico BD & DC reliquis duobus trianguli lateribus BA & AC minores quidem esse, vero continere angulum BDC majorem angulo BAC . producat enim BD ad E . & quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora, erunt trianguli ABE duo latera BA & AE majora latere BE . communis apponatur EC . ergo



20. hujus.

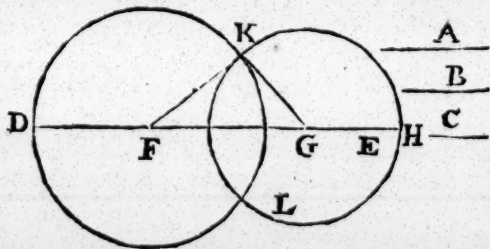
6 Axiom. 4. BA & AC ipsis BE & EC majora sunt. rursus quoniam CED trianguli duo latera CE & ED sunt majora latere CD , communis apponatur DB . quare CE & EB ipsis CD & DB sunt majora. Sed ostensum est BA & AC majora esse BE & EC . multo igitur BA & AC ipsis BD & DC majora sunt. rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore & opposito est major: erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipso CED . Eadem ratione & trianguli ABE exterior angulus CEB ipso BAC est major: sed angulus BDC ostensus est major angulo CEB . multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituentur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt. Quod demonstrare oportebat.

16. hujus.

PROP. XXII. PROBL.

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sunt, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua majores esse, quomodocunque sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sint tres datæ rectæ lineæ A , B , C , quarum duæ reliqua majores sint, quomodocunque sumptæ, ut scil. A , B , quidem sint majores quam C , A , C , vero majores quam B , & præterea B , C , majores quam A . Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis A , B , C , triangulum constituere. exponatur aliqua recta linea DE , terminata quidem ad D , infinita vero ad E , & ponatur

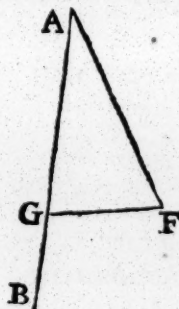


ponatur ipsi quidem A æqualis ^aDF, ipsi vero B æqualis FG, ^a 3. hujus.
 & ipsi C æqualis GH: & centro F, intervallo autem FD
 circulus ^bdescribatur DKL. rursusque centro G, & intervallo ^b 3. Postul.
 GH alius circulus KLH describatur, & jungantur KF KG.
 Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C, triangulum
 KFG constitutum esse, quoniam enim punctum F centrum
 est DKL circuli; erit FD æqualis ^cFK. sed FD est æqualis ^c Def. 15.
 A. Ergo & FK ipsi A est æqualis. rursus quoniam punctum
 G centrum est circuli LKH, erit GH æqualis ^cGK. sed GH
 est æqualis C. ergo & GK ipsi C æqualis erit. est autem &
 FG æqualis B: tres igitur rectæ lineæ KF FG GK tribus
 A, B, C, æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis KF FG GK,
 quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum
 constitutum est KFG. Quod facere oportebat.

PROP. XXIII. PROBL.

*Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum,
 dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum
 constituere,*

Sit data quidem recta linea AB, datum vero in ipsa pun-
 ctum A; & datus angulus rectilineus DCE. Oportet igitur
 ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A
 dato angulo rectilineo



sumantur in utraque ip-
 sarum CD CE quævis
 puncta D, E, ducaturque
 DE, & ex tribus rectis
 lineis, quæ æquales sint
 tribus CD DE EC trian-
 gulum ^aconstituatur AFG,

ita ut CD sit æqualis AF, & CE ipsi AG, & DE ipsi FG.
 Itaque quoniam duæ DC CE duabus FA AG æquales sunt,
 altera alteri, & basis DE est æqualis basi FG: erit & an-
 gulus DCE angulo FAG æqualis ^b. Ad datam igitur rectam
 lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo
 rectilineo DCE æqualis angulus rectilineus constitutus est
 FAG. Quod facere oportebat.

^a 22. hujus.

^b 8. hujus.

PROP. XXIV. PROBL.

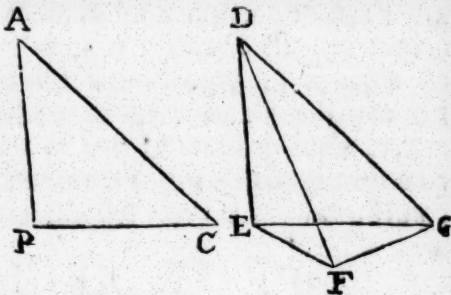
*Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia hæ-
 beant, alterum alteri, angulum autem angulo mayo-
 rem,*

rem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF , quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB æquale lateri DE ; latus vero AC æquale DF : At angulus

BAC angulo EDF fit major. Dico, & basim BC basi EF majorem esse. quoniam enim angulus BAC major est angulo

a 23. hujus. EDF , constituatur *a* ad rectam lineam DE , & ad punctum in ea D , angulo BAC æqualis an-



b 3. hujus. gulus EDG , ponaturque alterutri ipsarum AC DF æqualis *b* DG , & GE FG jungantur. itaque quoniam AB quidem est æqualis DE , AC vero ipsi DG , duæ BA AC duabus ED DG æquales sunt, altera alteri; & angulus BAC est æqualis angulo EDG . ergo basis BC basi EG est æqualis. rursus quoniam æ-

c 4. hujus. qualis est DG ipsi DF ; est angulus DFG angulo DGF *c* æqualis: erit itaque DFG angulus angulo EGF major. multo igitur major est EEG angulus ipso EGF . & quoniam triangulum est EEG , angulum EEG majorem habens angulo EGF ; majori

d 5. hujus. *e* 19. hujus. autem angulo latus majus subtenditur *e*; erit & latus EG latere EF majus. sed EG latus est æquale lateri BC . Ergo, & BC ipso EF majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem: & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF , quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB æquale lateri DE , & latus AC lateri DF : basis autem BC basi EF sit major. Dico, & angulum

BAC

BAC angulo EDF majorem esse. Si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus

BAC angulo EDF: esset enim, & basis BC basi EF æqualis ^a.

Non est autem. Non igitur

æqualis est BAC angulus angulo EDF. Sed neque minor.

minor enim esset ^b & basis BC basi EF. Atqui non est. Non

igitur angulus BAC angulo

EDF est minor. ostensum autem est neque esse æqualem.

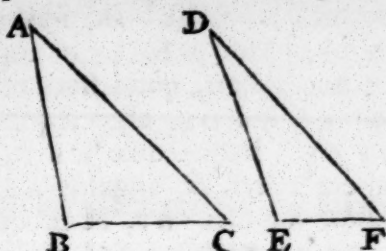
Ergo angulus BAC angulo EDF necessario major erit. Si

igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia ha-

beant, alterum alteri, basim vero basi majorem; & angu-

lum angulo qui æqualibus lateribus continetur, majorem

habebunt. Quod demonstrare oportebat.



^a 4. hujus.

^b 24. hujus.

PROP. XXVI. THEOR.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis DEF EFD æquales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem ABC æqualem angulo DEF; angulum vero BCA angulo EFD. Habeant autem,

& unum latus uni lateri æquale, & primo quod æqualibus

adjacet angulis; nempe latus BC lateri EF. Dico, & reli-

qua latera reliquis lateribus æ-

qualia habere, alterum alteri,

latus sc. AB lateri DE; & la-

tus AC ipsi DF, & reliquum

angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim in-

æqualis est AB ipsi DE, una ipsarum major est. Sit major

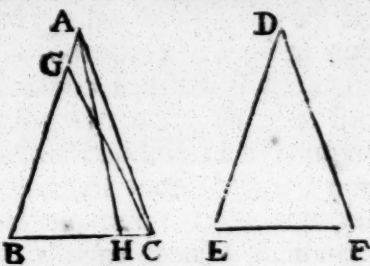
AB, ponaturque GB æqualis DE; & GC jungatur. Quo-

niam igitur BG quidem est æqualis DE, BC vero ipsi EF,

duæ GB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: &

angulus GBC æqualis angulo DEF. basis igitur GC basi

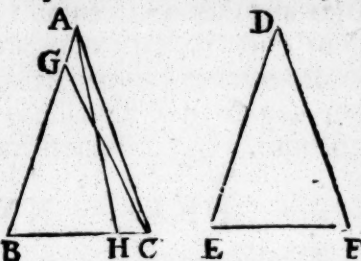
DF est ^a æqualis: & GBC triangulum triangulo DEF, & re-



B 3

^a 4. hujus.
liqui

liqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo $\angle GCB$ angulus est æqualis angulo $\angle DFE$. sed angulus $\angle DFE$ angulo $\angle BCA$ æqualis ponitur. quare, & $\angle BCG$ angulus angulo $\angle BCA$ est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est AB ipsi DE . ergo æqualis erit. est autem, & BC æqualis EF . Itaque duæ $ABBC$ duabus $DEEF$ æquales sunt, altera alteri, & angulus $\angle ABC$ æqualis angulo $\angle DEF$. Basis igitur AC basi DF , & reliquus angulus $\angle BAC$ reliquo angulo $\angle EDF$ est æqualis. Sed rursus sint latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur æqualia, ut AB ipsi DE . Dico rursus, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia esse; AC quidem ipsi DF , BC vero ipsi EF : & adhuc reliquum angulum $\angle BAC$ reliquo angulo $\angle EDF$ æqualem. Si enim inæqualis est BC ipsi EF , una ipsarum major est. Sit major BC , si fieri potest, ponaturque BH æqualis EF , & AH jungatur. Quoniam igitur BH quidem est æqualis EF , AB vero ipsi DE ; duæ $ABBH$ duabus $DEEF$ æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; ergo AC basis AH basi DF est æqualis: & ABH triangulum triangulo DEF & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Æqualis igitur est angulus $\angle BHA$ angulo $\angle EFD$. sed $\angle EFD$ est æqualis $\angle BCA$. Ergo, & $\angle BHA$ angulus angulo $\angle BCA$ est æqualis. trianguli igitur AHC exterior angulus $\angle BHA$ æqualis est interiori & opposito $\angle BCA$, quod fieri non potest. quare non inæqualis est BC ipsi EF æqualis igitur. est autem, & AB æqualis DE . duæ igitur $ABBC$ duabus $DEEF$ æquales sunt, altera alteri: angulosque æquales continent. quare basis AC æqualis est basi DF , & ABC triangulum triangulo DEF , & reliquus angulus $\angle BAC$ reliquo angulo $\angle EDF$ est æqualis. Si igitur duo triângula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. Quod oporebat demonstrare.



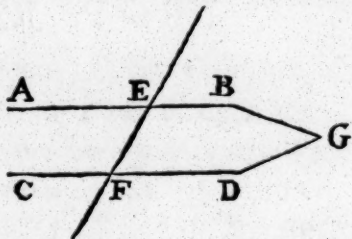
PROP.

PROP. XXVII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas $ABCD$, recta linea EF incidens alternos angulos AEF EFD æquales inter se faciat. dico rectam lineam AB ipsi CD parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ

AB , CD , vel ad partes BD convenient, vel ad partes AC producantur, convenientque ad partes BD in puncto G . itaque GEF trianguli exterior angulus AEF major ^a est interiore & opposito EGF . sed &



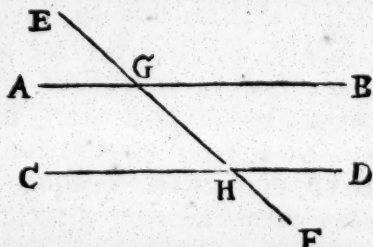
^a 16. hujus.

æqualis ^b, quod fieri non potest. non igitur AB CD productæ ^b ex hyp. ad partes BD convenient. similiter demonstrabitur neque convenire ad partes AC . quæ vero in neutras partes conveniunt, parallelæ ^c inter se sunt. parallela igitur est AB ipsi ^c Def. 35 CD . Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ inter se erunt rectæ lineæ, quod ostendere oportebat.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas $ABCD$ recta linea EF incidens exteriorem angulum EGB interiori, & opposito GHD æqualem faciat; vel interiores & ad easdem partes BGH GHD , duobus rectis æquales. dico rectam lineam AB rectæ



^a Ex hyp.

^b 15. hujus.

CD parallelam esse. Quoniam enim EGB angulus æqualis est ^a angulo GHD , angulus autem EGB angulo AGH ^b, erit & angulus AGH angulo GHD æqualis: & sunt alterni. parallela igitur est AB ipsi CD ^c.

rursus quoniam anguli BGH ^c Ex antecedente. GHD duobus rectis sunt æquales ^a, & sunt AGH BGH æ-

^B 4

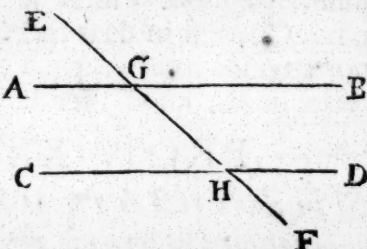
quales

d 13. hujus. quales duobus rectis *d*: erunt anguli AGH BGH angulis BGH GHD æquales. communis auferatur BGH . reliquus igitur AGH est æqualis reliquo GHD : & sunt alterni. ergo AB ipsi CD parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori & opposito & ad easdem partes æqualem, & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas AB CD recta linea incidat EF . dico alternos angulos AGH GHD inter se æquales efficere, & exteriorem EGB interiori, & opposito, & ad easdem partes GHD æqualem: & interiores, & ad easdem partes BGH GHD duobus rectis æquales. si enim inæqualis est AGH ipsi GHD , unus ipsorum major est. sit major AGH . & quoniam AGH angulus major est angulo GHD ; communis apponatur BGH . anguli igitur AGH BGH angulis BGH GHD majores sunt.



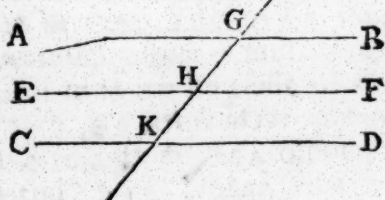
a 13. hujus. sed anguli AGH BGH sunt æquales duobus rectis *a*. ergo BGH GHD anguli sunt duobus rectis minores. quæ vero à minoribus, quam sunt duo recti, in infinitum producantur rectæ lineæ, inter se conveniunt *b*. ergo rectæ lineæ AB CD in infinitum productæ convenient inter se. atqui non conveniunt cum parallelæ possunt. non igitur inæqualis est AGH angulus angulo GHD . quare necessario est æqualis. *c* 15. hujus. angulus autem AGH æqualis est angulo EGB *c*. ergo, & EGB ipsi GHD æqualis erit. communis apponatur BGH . anguli igitur EGB BGH sunt æquales angulis BGH GHD . sed EGB BGH æquales sunt duobus rectis: Ergo, & BGH GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum $ABCD$ ipsi EF parallelæ. dico & AB ipsi CD parallelam esse. Incidat enim in ipsas recta linea GK . & quoniam in parallelas rectas lineas $ABEF$, recta linea GK incidit, angulus



^a 29. hujus.

AGH angulo GHE est æqualis ^a. rursus quoniam in parallelas rectas lineas EFC , recta linea incidit GK , æqualis est GHE angulus angulo

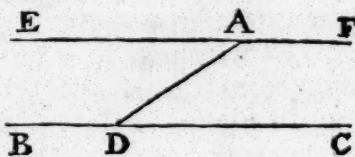
GKD ^a. ostensus autem est, & angulus AGK angulo GHE æqualis. ergo, & AGK ipsi GKD æqualis erit. & sunt alterni. parallela igitur est AB ipsi CD ^b. ergo quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt. Quod oportebat demonstrare.

^b 27. hujus.

PROP. XXXI. PROBL.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A , data vero recta linea BC oportet per A punctum ipsi BC rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC quodvis punctum D , & jungatur AD : constituaturque ^a ad rectam lineam DA , & ad punctum in ipsa A , angulo ADC æqualis angulus DAE : & in directum ipsi EA recta linea AF producat. quoniam igitur in duas rectas lineas BC EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD ADC inter se æquales efficit, EF ipsi



^a 23. hujus.

BC parallela erit ^b. per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC parallela ducta est recta linea EAF . quod facere oportebat.

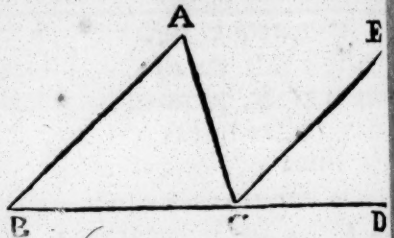
^b 27. hujus.

PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis, & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit

Sit triangulum ABC : & unum ipsius latus BC in D producat. dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus, & oppositis CAB ABC æqualem esse; & trianguli tres interiores angulos ABC BCA CAB duobus rectis esse æquales. *hujus.* ducatur ϵ enim per punctum C ipsi AB rectæ lineæ parallela CE . & quoniam AB ipsi CE parallela est, & in ipsas incidit AC , alterni anguli BAC ACE inter se æquales sunt ^{*b*}. rursus quoniam AB parallela est CE & in ipsas incidit recta linea BD , exterior angulus ECD interiori & opposito ABC est æqualis ^{*b*}. ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo BAC . quare totus ACD exterior angulus æqualis est duobus interioribus, & oppositis BAC ABC . communis apponatur ACB . anguli igitur ACD ACB tribus ABC BAC ACB æquales sunt. sed anguli ACD ACB sunt æquales ^{*c*} duobus rectis. ergo & ACB CBA CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. Quod demonstrare oportebat.



COROLLARIA.

1. Omnes tres anguli cujusque trianguli simul sumpti æquales sunt tribus angulis cujusque alterius trianguli simul sumptis.
2. Si in uno triangulo duo anguli aut singuli aut simul æquales sint duobus angulis alterius trianguli, erit reliquus angulus reliquo æqualis.
3. In triangulo si unus angulus rectus sit, reliqui simul unum rectum faciunt.
4. In triangulo Isocele si angulus æquis cruribus contentus rectus sit, reliqui ad basim sunt semirecti.
5. In triangulo æquilatere angulus quilibet æqualis est duorum rectorum vel $\frac{2}{3}$ unius recti.

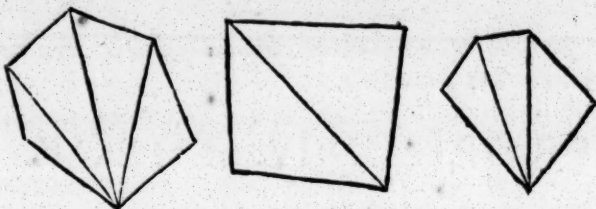
THEOREMA.

Omnes simul interiores anguli cujuscunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figuræ.

Nam figura unaquæque rectilinea resolvi potest in triangula binario pauciora quam sunt ipsius figuræ latera, V. G. si quatuor latera habeat resolvitur in duo triangula, si quinque in

tria

tria triangula, si sex in quatuor, & sic deinceps; quare per præcedentem omnes horum triangulorum anguli æquantur bis tot rectis quot sunt triangula, sed omnes horum triangulorum



anguli æquales sunt angulis figuræ interioribus; quare omnes anguli interiores figuræ æquales sunt bis tot rectis quot sunt triangula, hoc est bis tot rectis demptis quatuor quot sunt latera figuræ. Q. E. D.

THEOR. II.

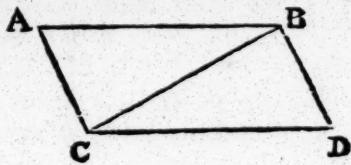
Omnes simul exteriores anguli cujusque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos.

Nam exteriores simul cum interioribus conficiunt bis tot rectos quot sunt latera figuræ; vero ex precedente Theor. omnes interiores soli conficiunt bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figuræ, quare exteriores conficiunt quatuor rectos. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

Sint æquales, & parallelæ $ABCD$: & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ AC BD . dico AC BD æquales, & parallelas esse. ducatur enim BC & quoniam AB parallela est CD , in ipsasque incidit BC ; alterni anguli ABC BCD æquales sunt ^a. rursus quoniam AB est æqualis CD , communis autem BC , duæ AB BC duabus BC CD sunt æquales; & angulus ABC æqualis angulo BCD . basis igitur AC



a 29. hujus.

bali BD est æqualis ^b: triangulumque ABC triangulo BCD : ^b 4. hujus. & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus ACB angulo CBD est æqualis. & quoniam in duas rectas lineas AC BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB CBD æquales

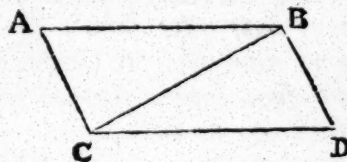
c 27. hujus. les inter se efficit, parallela est AC ipsi BD; Otenſa autem est & ipsi æqualis. Quæ igitur æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt. Quod oportebat demonstrare.

Defin. *Parallelogrammum est figura quadrilatera cujus bina opposita latera sunt parallela.*

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum spatiorum latera quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt; & diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter BC. dico ACDB parallelogrammi latera, quæ ex opposito, & angulos inter se æqualia esse; & diametrum BC ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est AB ipsi CD, & in ipsas incidit recta linea BC; anguli alterni ABC BCD inter se æquales sunt a. rursus quoniam AC ipsi BD parallela est, & in ipsas incidit BC; alterni anguli ACB CBD æquales sunt inter se a. duo igitur triângula sunt ABC CBD; quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis BCD CBD æquales habent, alterum alteri: & unum latus uni lateri æquale, scil. quod est ad æquales angulos, utrique commune BC. ergo, b & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem, æquale igitur est latus quidem AB lateri CD: latus vero AC ipsi BD, & angulus BAC angulo BDC æqualis. & quoniam angulus ABC est æqualis angulo BCD; & angulus CBD; angulo ACB; erit totus angulus ABD æqualis toti ACD. ostensus autem est, & angulus BAC angulo BDC æqualis. parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt. dico etiam diametrum ea bifariam secare. quoniam enim æqualis est AB ipsi CD communis autem BC. duæ AB BC duabus DC CB æquales sunt, altera alteri & angulus ABC æqualis est angulo BCD. basis igitur c AC basi DB æqualis. quare, & triângulum ABC triângulo BCD æquale erit. ergo diameter BC parallelogrammum ACDB bifariam secat. Quod oportebat demonstrare.

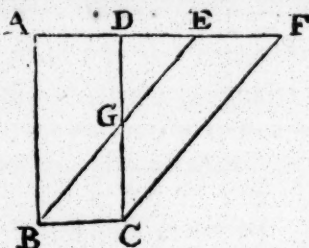


PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma super eadem basi, & in iisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma $ABCD$, $EBCF$ super eadem basi BC , & in eisdem parallelis AF BC constituta. dico $ABCD$ parallelogrammo $EBCF$ æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est $ABCD$, æqualis ^a est AD ipsi BC . eadem quoque ratione, & EF est æqualis BC . quare &, AD ipsi EF æqualis erit ^b: & communis DE . tota igitur AE ^c toti DF est æqualis. est autem, & AB æqualis DC . ergo duæ EA



^a 34. hujus.

^b Axiom. 1.

^c Axiom. 2.

AB duabus FD DC æquales sunt, altera alteri, & angulus FDC æqualis angulo EAR , exterior interiori ^d, basis igitur EB basi FC est ^e æqualis, & EAB triangulum æquale triangulo FDC . commune auferatur DGE . reliquum igitur trapezium $ABGD$ reliquo trapezio $EGCF$ est æquale ^f. commune apponatur GBC triangulum. ergo totum parallelogrammum $ABCD$ toti parallelogrammo $EBCF$ æquale erit. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

^d 29. hujus.

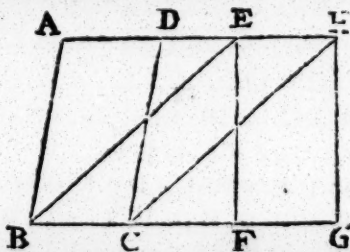
^e 4. hujus.

^f Axiom. 3.

PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt,

Sint parallelogramma $ABCD$ $EFGH$ super æqualibus basibus BC FG , & in eisdem parallelis AH BG constituta. dico parallelogrammum $ABCD$ parallelogrammo $EFGH$ æquale esse. Coniungantur enim BE CH . & quoniam æqualis ^a est BC ipsi FG & FG æqualis ipsi EH ; erit & BC ipsi EH æqualis. suntque parallelæ, & ipsas coniungunt BE CH . quæ autem æquales, & parallelas ad easdem partes coniungunt, æ-



^a Hyp.

quales, & parallelæ sunt ^b. ergo EB , CH & æquales sunt, & parallelæ: quare $EBCH$ parallelogrammum est, & æquale parallelogrammo $ABCD$; basim enim eandem habet BC , ^c 35. hujus. &

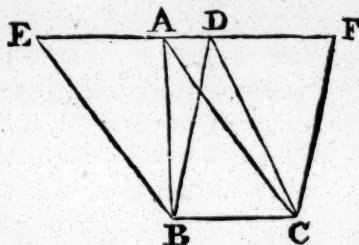
&c

& in eisdem parallelis BC, AD constituitur. simili ratione, & $EFGH$ parallelogrammum eidem parallelogrammo EBC est æquale. ergo parallelogrammum $ABCD$ parallelogrammo $EFGH$ æquale erit. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVII. THEOR.

Triangula super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

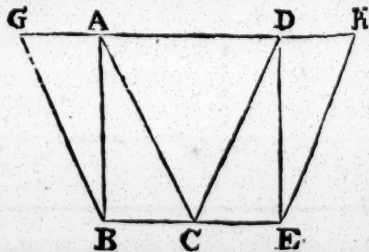
- Sint triangula ABC, DBC super eadem basi BC , & in eisdem parallelis AD, BC constituta. dico ABC triangulum triangulo DBC æquale esse. Producat AD ex utraque parte in E, F puncta: & per B quidem ipsi CA parallela ducatur BE ,
 a 31. hujus. a per C vero ipsi BD parallela CF . parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum $EBCA, DBCF$, & parallelogrammum
 e 35. hujus. $EBCA$ est æquale c parallelogrammo $DBCF$, etenim super eadem sunt basi BC , & in eisdem parallelis BC, EF : estque pa-
 b 34. hujus. rallelogrammi quidem $EBCA$ dimidium b ABC triangulum, cum diameter AB ipsum bifariam secet: parallelogrammi vero $DBCF$ dimidium b triangulum DBC ; diameter enim DC
 c Axiom. 7. ipsum bifariam secat. quæ autem c æqualium dimidia sunt inter se æqualia sunt. ergo triangulum ABC triangulo DBC est æquale. Triangula igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XXXVIII. THEOR.

Triangula super basibus, æqualibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

- Sint triangula ABC, DCE super æqualibus basibus, BC, CE & in eisdem parallelis BE, AD constituta. dico ABC triangulum DCE triangulo æquale esse. Producat AD ex utraque parte in G, H puncta: & per B quidem ipsi CA parallela ducatur BG : per E vero ducatur EH parallela ipsi DC . parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum $GBCA, DCEH$.
 a 31. hujus. atque

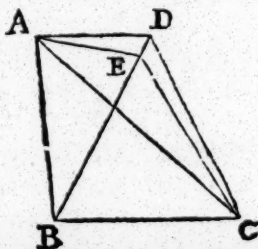


atque est parallelogrammum $GBCA$ æquale δ parallelo- δ 36. hujus.
grammo $DCEH$: in æqualibus enim sunt basibus BC CE , &
in eisdem BE GH parallelis. parallelogrammi vero $GBCA$
dimidium ϵ est ABC triangulum, nam diameter AB ipsum ϵ 34. hujus.
bifariam secat. & parallelogrammi $DCEH$ dimidium ϵ est
triangulum DCE , diameter enim DE ipsum secat bifariam.
quæ autem æqualium dimidia sunt δ , inter se æqualia sunt. δ Axiom. 7.
ergo ABC triangulum triangulo DCE est æquale. Triangula
igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis consti-
tuta, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXIX. THEOR.

*Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem par-
tes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.*

Sint æqualia triangula ABC DBC super eadem basi BC
constituta, & ad easdem partes. dico, & in eisdem paralle-
lis esse. ducatur enim AD . dico AD parallelam esse ipsi
 BC . Si enim non est parallela,
ducatur α per A punctum ipsi
 BC parallela recta linea AE , &
 EC ducatur. æquale igitur
est ABC triangulum triangulo
 EBC δ , super eadem enim est
basi BC , & in eisdem BC , AE
parallelis. sed ABC triangu-
lum triangulo DBC ϵ est æquale. ergo & triangulum DBC ϵ Ex hyp.
æquale est ipsi EBC triangulo, majus minori, quod fieri non
potest. non igitur AE ipsi BC parallela est. similiter osten-
demus neque aliam quampiam parallelam esse, præter ipsam
 AD , ergo AD ipsi est parallela. Triangula igitur æqualia
super eadem basi, & ad easdem partes constituta in eisdem
quoque sunt parallelis. Quod oportebat demonstrare.



α 31. hujus.

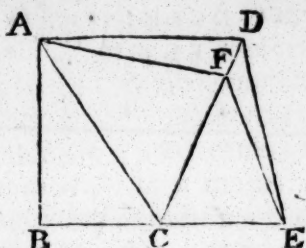
δ 37. hujus.

PROP. XL. THEOR.

*Triangula æqualia super basibus æqualibus, & ad
easdem partes constituta in eisdem quoque sunt pa-
rallelis.*

Sint æqualia triangula ABC CDE super æqualibus basibus
 BC CE constituta. dico etiam in eisdem esse parallelis. du-
catur enim AD . dico AD ipsi BE parallelam esse. Nam
si non est, ducatur per A ipsi BE parallela AF , α & FE du- α 31. hujus.
catur.

38. hujus. catur. triangulum igitur ABC triangulo FCE est æquale, cum super æqualibus basibus & in eisdem parallelis BE & AF constituentur. sed triangulum ABC æquale est triangulo DCE . ergo & triangulum DCE triangulo FCE æquale erit, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AF ipsi BE est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter AD . ergo AD ipsi BE parallela erit. Æqualia igitur triangula super basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. Quod demonstrare oportebat.

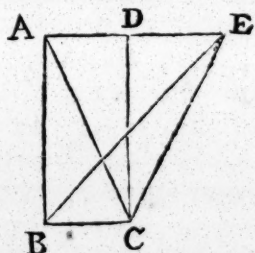


PROP. XLI. THEOR.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim $ABCD$, & triangulum EBC , basim habeant eandem BC , & in eisdem sint parallelis BC & AE . dico parallelogrammum $ABCD$ trianguli EBC duplum esse.

37. hujus. Jungatur enim AC . triangulum igitur ABC triangulo EBC est æquale; namque super eadem basi BC , & in eisdem BC & AE parallelis constituentur. sed $ABCD$ parallelogrammum duplum est trianguli ABC , cum diameter AC



34. hujus. ipsum bifariam secet. quare & ipsius EBC trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant, & in eisdem sint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. Quod demonstrare oportebat.

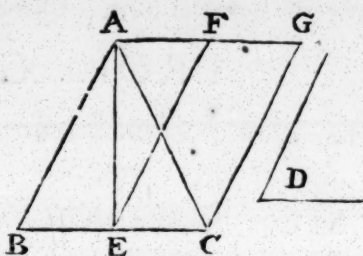
PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum ABC , datus autem rectilineus angulus D . Itaque oportet, dato triangulo ABC æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali.

sec erur

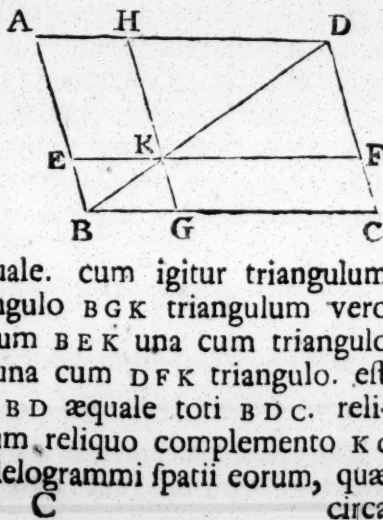
secetur b/c bifariam a in E , & juncta AE , ad rectam lineam a 10. hujus.
 EC , arque ad punctum in ea
 E , constituatur angulus b CEF
 $\angle$ æqualis ipsi D : & per A qui-
dem ipsi EC parallela ducatur
 c AG ; per C vero ipsi FE du-
catur parallela c CG . parallelo-
grammum igitur est $FECG$.
& quoniam BE est æqualis EC ,
erit & ABE triangulum d triangulo AEC æquale, super æqua- d 38. hujus.
libus enim sunt basibus BE EC , & in eisdem BC AG paral-
lelis. ergo triangulum ABC trianguli AEC est duplum. est
autem, & parallelogrammum $FECG$ duplum e trianguli e 41. hujus.
 AEC ; basim enim eandem habet, & in eisdem est parallelis.
æquale igitur est $FECG$ parallelogrammum triangulo ABC
habetque CEF angulum æqualem angulo D dato. Dato igi-
tur triangulo ABC æquale parallelogrammum $FECG$ con-
stitutum est, in angulo CEF , qui angulo D est æqualis. Quod
quidem facere oportebat.



PROP. XLIII. THEOR.

*Omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ circa dia-
metrum sunt, parallelogrammorum complementa in-
ter se sunt æqualia.*

Sit parallelogrammum $ABCD$, cujus diameter BD , & circa
ipsam BD parallelogramma quidem sint FH EG , quæ vero
complementa dicuntur AK KC . dico AK complementum
complemento KC æquale esse. Quoniam enim parallelogram-
mum est $ABCD$, & ejus dia-
meter BD , æquale a est ABD
triangulum triangulo BDC .
rursus quoniam $HKFD$ paral-
lelogrammum est, cujus dia-
meter DK , triangulum HDK
triangulo DFK æquale a erit.
eadem ratione, & triangulum
 KGB triangulo KEB est æquale. cum igitur triangulum
quidem BEK æquale sit triangulo BGK triangulum vero
 HDK ipsi DFK ; erit triangulum BEK una cum triangulo
 HDK æquale triangulo BGK una cum DFK triangulo. est
autem & totum triangulum ABD æquale toti BDC . reli-
quum igitur AK complementum, reliquo complemento KC
est æquale. Ergo omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ
circum

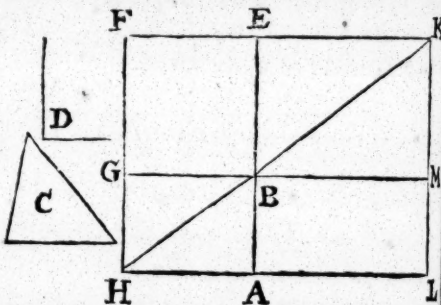


circa diametrum sunt parallelogrammorum complementa inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XLIV. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

- Sit data quidem recta linea AB ; datum vero triangulum C , & datus angulus rectilineus D . oportet igitur ad datam rectam lineam AB , dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D æquali. Constituatur triangulo C æquale ^a parallelogrammum $BEFG$; in angulo EBG , qui est æqualis D . & ponatur BE in directum ipsi AB , producatque FG ad H : & per A alterutri ipsarum BG EF parallela ^b ducatur AH , & HB jungatur. quoniam igitur in parallelas AH EF recta linea HF incidit, anguli AHF HFE duobus rectis æquales ^c sunt. quare BHF HFE duobus rectis sunt minores. quæ vero à minoribus, quam sunt duo recti, in infinitum producantur, conveniunt ^d inter se. ergo HB FE productæ convenient. producantur, & convenient in K : perque K alterutri ipsarum EA FH parallela ^b ducatur KL , & AH GB ad L , M puncta producantur. parallelogrammum igitur est $HLKF$, cujus diameter HK , & circa HA parallelogramma quidem sunt $AGME$; ea vero quæ complementa dicuntur LB BF : ergo LB ipsi BF est ^e æquale. sed, & BF æquale est triangulo C . quare, & LB triangulo C æquale erit. & quoniam G BE angulus æqualis ^f est angulo ABM , sed & æqualis angulo D , erit & angulus ABM angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam AB , dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutum est LB , in angulo ABM , qui est æqualis angulo D . Quod facere oportebat.



PROP. XLV. PROBL.

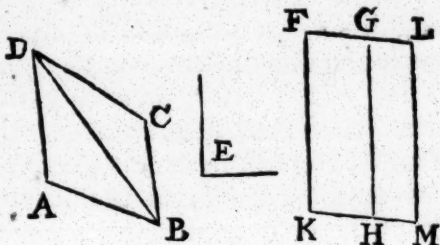
Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum $ABCD$, datus vero angulus rectilineus E . oportet rectilineo $ABCD$ æquale parallelogrammum

num constituere in angulo ipsi E æquali. Coniungantur enim DB , & constituatur triangulo ADB æquale ^a parallelogrammum FH : in angulo HKF , qui est æqualis angulo E . deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale ^b parallelogrammum GM , in angulo GHM qui angulo E est æqualis. & quoniam angulus E æqualis est utrique ipsorum HKF GHM , erit & HKF angulo GHM æqualis. communis apponatur KHG , anguli igitur HKF KHG angulis KHG GHM æquales sunt. sed HKF KHG sunt æquales ^c duobus rectis. ergo,

^c 29. hujus.

& KHG GHM duobus rectis æquales erunt. itaque ad aliquam rectam lineam GH , & ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt.



in directum igitur ^d est KH ipsi HM . & quoniam in parallelas KM FG recta linea HG incidit, alterni anguli MHG HGF æquales ^e sunt. communis apponatur HGL . anguli igitur MHG HGL , angulis HGF HGL sunt æquales. at anguli MHG HGL æquales ^e sunt duobus rectis. quare & anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt. in directum ^d igitur est FG ipsi GL . & quoniam KF ipsi HG & æqualis est, & parallela, sed & HG ipsi ML ; erit KF ^e ipsi ML ^e 30. hujus. & æqualis, & parallela. ipsasque coniungunt rectæ lineæ KM FL . ergo & KM FL æquales ^f & parallelae sunt. parallelogrammum igitur est $KFLM$. at cum triangulum quidem ABD æquale sit parallelogrammo HF : triangulum vero DBC parallelogrammo GM ; erit totum $ABCD$ rectilineum toti parallelogrammo $KFLM$ æquale. Dato igitur rectilineo $ABCD$ æquale parallelogrammum constitutum est $KFLM$ in angulo FKM , qui est æqualis angulo E dato. Quod facere oportebat.

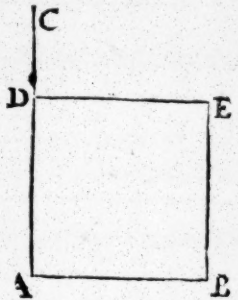
Cor. Ex jam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROP. XLVI. PROBL.

Super data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB . oportet super ipsa AB quadratum descri-

- a* 11. hujus. describere. Ducatur *a* rectæ lineæ *AB* à puncto in ea dato
b 3. hujus. *A* ad rectos angulos *AC*; & ipsi *AB* æqualis *b* ponatur *AD*;
 perque punctum *D* ducatur *c* *DE* ipsi *AB* parallela, & per *B*
c 31. hujus. ipsi *AD* parallela *c* ducatur *BE*. parallelogrammum igitur est
ADEB. & *AB* quidem est *d* æqualis *DE*,
d 34. hujus. *AD* vero ipsi *d* *BE*. sed *BA* ipsi *AD* est
 æqualis. quatuor igitur *BA AD DE EB* inter se æquales sunt, ideoque æquilaterum
 est *ADEB* parallelogrammum. dico etiam rectangulum esse. quoniam enim in
 parallelas *AB DE* recta linea incidit *AD*,
e 29. hujus. anguli *BAD ADE* duobus rectis sunt *e* æ-
 quales. rectus autem est *BAD*, ergo, &
ADE rectus erit. parallelogrammorum
 vero spatiorum, quæ ex opposito sunt la-
 tera, & anguli *f* inter se æqualia sunt. re-
 ctus igitur est uterque oppositorum *ABE BED* angulorum:
 & ob id rectangulum est *ADEB*. Oltensum autem est æ-
 quilaterum esse. Quadratum igitur fit necesse est, atque est
 super recta linea *AB* descriptum. Quod ipsum facere oportebat.

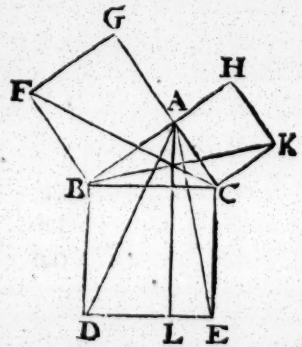


Cor. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum est rectangulum.

PROP. XLVII. THEOR.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, quadratum æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

- Sit triangulum rectangulum *ABC*, rectum habens *BAC* angulum. dico quadratum descriptum à recta *BC* æquale esse quadratis, quæ ab ipsis *BA AC* describuntur. describatur *a* enim à *BC* quidem quadratum *BDEC*, ab ipsis
a 46. hujus. *BA AC* quadrata *a* *GBHC*, perque *A* alterutri ipsarum *BD CE* parallela ducatur *AL*; & *AD FC* jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum *BAC*
b Def. 30. *BAG* rectus *b* est, ad aliquam rectam lineam *BA*, & ad datum in ea punctum *A* duæ rectæ lineæ *AC AG* non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt duobus rectis æquales efficiunt. in directum igitur *c* est *CA* ipsi *AG*. eadem ratione, & *AB* ipsi *AH* est in directum. & quoniam angulus
c 14. hujus. *DBC*

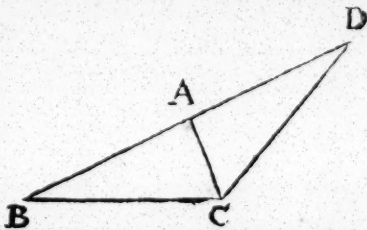


DBC est æqualis angulo FBA, rectus enim uterque est, communis apponatur ABC, totus igitur DBA angulus toti FBC est d æqualis. quod cum duæ AB BD duabus FB BC æqua- d Axiom.2. les d sint, altera alteri, & angulus DBA æqualis angulo FBC; erit & basis AD basi FC æqualis e , & ABD triangulum e 4. hujus. triangulo FBC æquale. estque f trianguli quidem ABD duplum BL parallelogrammum, basim enim eandem habent BD, & in eisdem BD AL sunt parallelis: trianguli f vero f 41. hujus. FBC duplum est GB quadratum, rursus enim basim habent eandem FB, & in eisdem sunt parallelis FB GC. quæ autem æqualium duplicia inter se æqualia g sunt. ergo æquale est g Axiom.6. parallelogrammum BL ipsi GB quadrato. similiter junctis AE BK, ostendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HC. totum igitur BDEC quadratum duobus quadratis GB HC est æquale. & describitur quidem BDEC quadratum à recta linea BC, quadrata vero GB HC ab ipsis BA AC. quadratum igitur BE, à latere BC descriptum æquale est quadratis, quæ describuntur à lateribus BA AC. Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur à latere rectum angulum subtendente æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XLVIII. THEOR.

Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

Si trianguli ABC, quod ab uno latere BC describitur quadratum æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus BA AC describuntur, dico angulum BAC rectum esse. ducatur enim à puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD; ponaturque AD ipsi BA æqualis, & DC jungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AB, erit & quadratum quod describitur ex DA æquale quadrato ex AB. commune apponatur quadratum, quod ex AC. ergo quadrata, quæ ex DA AC æqualia sunt quadratis quæ ex BA AC describuntur. sed quadratis quidem, quæ ex DA AC æquale a est quod a 47. hujus. ex DC quadratum; rectus enim angulus est DAC: quadratis



dratis vero, quæ ex BA AC æquale ponitur quadratum, quod ex BC : quadratum igitur, quod ex DC æquale est ei, quod ex BC quadrato. ergo & latus DC lateri CB est æquale. & quoniam DA est æqualis AB , communis autem AC , duæ DA AC æquales sunt duabus BA AC ; & basis DC est æqualis basi CB . angulus $\angle$ igitur DAC angulo BAC est æqualis. rectus autem est DAC . ergo & BAC rectus erit. Si igitur quadratum quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. Quod oportebat demonstrare.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

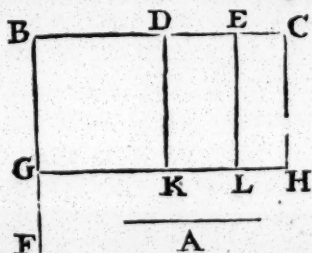
II.

Omnis parallelogrammi spatii, unumquodvis eorum quæ circa diametrum ipsis sunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, gnomon vocetur.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quocunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis, quæ sub recta linea infecta, & singulis partibus continentur.

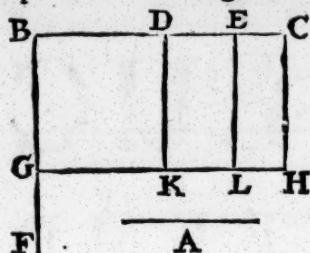
Sint duæ rectæ lineæ A, BC; & secta sit BC utcunque in punctis D, E. dico rectangulum rectis lineis A, BC contentum æquale esse rectangulo quod continetur sub A & BD, & rectangulo quod sub A & DE, & ei quod sub A & EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos ^a angulos BF: atque ipsi A ponatur ^b æqualis BG; & per G ^a 11. primi.



C 4

quidem ^b 3. primi.

^a 31. primi. quidem ipsi BC parallela & ducatur GH: per D, E, C vero ducantur DK EL CH parallelæ & ipsi BG. rectangulum igitur BH est æquale rectangulis BK DL EH: atque est BH quidem quod sub A & BC continetur; etenim continetur sub GB EC; & BG ipsi A est æqualis; rectangulum autem BK est quod continetur sub ipsis A & BD; continetur enim sub GB BD, quarum GB est æqualis A; & rectangulum DL est quod continetur sub A & DE, quoniam DK, hoc est BG ipsi A est æqualis; & similiter rectangulum EH est quod sub A & EC continetur. ergo rectangulum contentum sub A & BC est æquale rectangulo contento sub A & BD, & contento sub A & DE, & adhuc contento sub A & EC. Si igitur sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quocunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum, est æquale eis quæ sub recta linea infecta, & singulis partibus, continentur. Quod oportebat demonstrare.



PROP. II. THEOR.

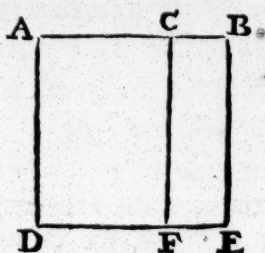
Si recta linea secta fuerit utcunque; rectangula, quæ sub tota, & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei quod à tota fit quadrato.

Recta enim linea AB secta fit utcunque in puncto C, dico rectangulum quod sub AB BC continetur, unà cum contento sub AB AC æquale esse quadrato, quod fit ex AB.

^a 46. primi. describatur enim ex AB quadratum ADEB, & per C ducatur

^b 31. primi.

alterutri ipsarum AD BE parallela CF. æquale igitur est AE rectangulis AF CE. atque est AE quidem quadratum, quod ex AB; AF vero rectangulum contentum sub BA AC;



etenim sub DA AC continetur, quarum AD ipsi AB est æqualis; & rectangulum CE continetur sub AB BC, cum BE sit æqualis AB. ergo rectangulum sub AB & AC unà cum rectangulo sub AB & BC æquale est quadrato ex AB. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit, rectangula, quæ sub tota & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.

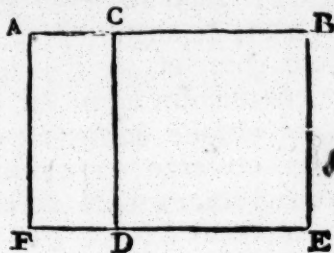
PROP.

PROP. III. THEOR.

Si recta linea utcumque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est & rectangulo, quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.

Recta enim linea AB secta fit utcumque in puncto C . dico sub AB & BC rectangulum æquale esse rectangulo sub AC & BC unâ cum quadrato, quod fit ex BC . describatur ^a enim ^a 46. primi.

ex BC quadratum $CDEB$; producaturque ED in F : & per A alterutri ipsarum CD BE parallela ^b ducatur AF . æquale utique erit rectangulum AE ipsis AD CE : & est AE quidem rectangulum contentum sub AB BC ; etenim sub AB BE continetur, quarum BE est æqualis BC : rectangulum vero AD est quod continetur sub AC CB , cum DC ipsi CB sit æqualis: & DB est quadratum, quod fit ex BC . ergo rectangulum sub AB BC est æquale rectangulo sub AC CB unâ cum quadrato quod ex BC . Si igitur recta linea utcumque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est rectangulo quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.



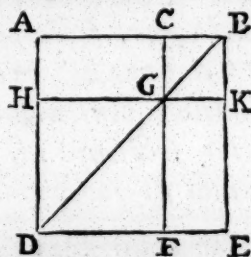
^b 31. primi.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea secta fuerit utcumque; quadratum quod fit à tota æquale erit, & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei quod bis sub partibus continetur rectangulo.

Recta enim linea AB secta fit utcumque in C . dico quadratum quod fit ex AB æquale esse, & quadratis ex AC CB

& ei rectangulo quod bis sub AC CB continetur. Describatur ^a enim ex AB quadratum $ADEB$, jungaturque BD , & per C quidem alterutri ipsarum AD BE parallela ^b ducatur CGF ; per G vero alterutri ipsarum AB DE ducatur ^b parallela HK . & quoniam CF est parallela ipsi AD , & in ipsas incidit BD : erit exterior angulus BGC interiori & opposito ADB æqualis ^c: ^c 29. primi.

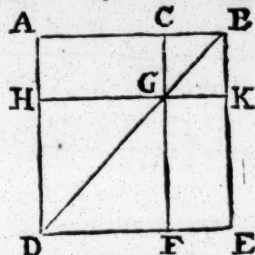


^a 46. primi.

^b 41. primi.

angulus

d 5. primi. angulus autem $\angle ADB$ est æqualis $\angle$ angulo $\angle ABD$, quod & latus BA æquale est lateri AD . quare $\angle CGB$ angulus angulo
 e 6. primi. $\angle GBC$ est æqualis: ac propterea latus BC lateri CG æquale.
 f 34. primi. sed & latus CB æquale f est lateri GK & CG ipsi BK . ergo &



GK est æquale KB , & $CGKB$ æquilaterum est. dico insuper etiam rectangulum esse. quoniam enim CG est parallela ipsi BK & in ipsas incidit CB ; anguli KBC GCB duobus rectis sunt æquales c . rectus autem est KBC angulus. ergo & rectus GCB , & anguli oppositi CGK GKB recti erunt. rectangulum igitur est $CGKB$. sed ostensum fuit & æquilaterum esse, quadratum igitur est $CGKB$, quod quidem fit ex BC eadem ratione & HF est quadratum quod fit ex HG , hoc est ex AC . ergo $HFCK$ ex ipsis AC CB quadrata sunt. & quoniam rectangulum AG est æquale g rectangulo GE ; atque est AG quod sub AC CB continetur, est enim GC ipsi CB æqualis: erit & GE æquale ei quod continetur sub AC CB , quare rectangula AG GE æqualia sunt ei quod bis sub AC CB continetur. sunt autem & $HFCK$ quadrata ex AC CB quatuor igitur $HFCK$ AG GE , & quadratis ex AC CB , & ei quod bis sub AC CB continetur rectangulo, sunt æqualia, sed $HFCK$ AG GE componunt totum $ADEB$ quadratum quod fit ex AB . quadratum igitur ex AB æquale est & quadratis ex AC CB , & ei quod bis sub AC CB continetur rectangulo. Quare si recta linea utcumque secta fuerit; quadratum quod fit à tota æquale erit & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei rectangulo quod bis sub partibus continetur. atque illud est quod demonstrare oportebat.

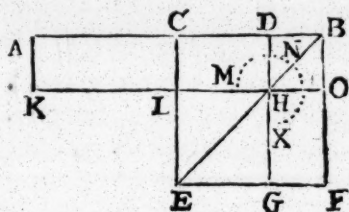
Cor. Ex hoc perspicue constat, in quadratis spatiis parallelogramma quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum una cum quadrato lineæ quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato.

Recta enim linea quævis AB secta sit in partes æquales ad punctum C , & in partes inæquales ad D , dico rectangulum contentum sub AD BD , una cum quadrato quod fit ex

CD æquale esse ei quod ex CB fit quadrato. Describatur enim ^a 46. primi. ex BC quadratum CEFB: ducaturque BE: & per D quidem alterutri ipsarum CE BF parallela ^b ducatur DHG; per ^b 31. primi. B vero ducatur ALK parallela ^b alterutri ipsarum CB EF: & rursus per A ducatur alterutri CL BO parallela ^b AK. & quoniam CH complementum æquale ^c est complemento HF, ^c 43. primi. commune apponatur DO, totum igitur CO toti DF est æquale. sed CO est æquale ^d AL, quoniam & AC ipsi CB. ergo & AL æquale est DF. commune apponatur CH. totum igitur AH ipsis FD DL æquale erit. sed AH quidem est quod sub AD DB continetur, etenim DH ipsi DB est æqualis ^e; FD DL vero est gnomon MNX. igitur MNX æqualis est ei quod sub AD DB continetur, commune apponatur LG, æquale ^e scilicet quadrato quod ex CD, ergo MNX gnomon, & LG æqualia sunt rectangulo, quod continetur sub AD DB, & ei, quod fit ex CD quadrato. sed MNX gnomon, & LG sunt totum quadratum CEFB, quod quidem fit ex CB. ergo rectangulum sub AD DB, una cum quadrato quod ex CD, æquale est ei quod ex CB fit quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum unà cum quadrato lineæ quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.



^e Cor. 4.
hujus.

PROP. VI. THEOR.

Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in directum adjiciatur quædam recta linea; rectangulum sub tota cum adjuncta, & adjuncta contentum, unà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato quod ab ea, quæ ex dimidia & adjuncta constat, tanquam ab una linea describitur.

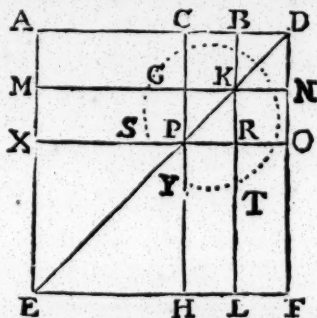
Recta enim linea quævis AB secetur bifariam in puncto C, & adjiciatur ipsi in directum BD. dico rectangulum sub AD DB unà cum quadrato ex BC æquale esse ei quod fit ex CD quadrato. Describatur enim ex CD quadratum GEFD, ^a 46. primi. & jungatur DE; per B alterutri ipsarum CE DF parallela ^b ducatur BHG: & per H ducatur KLM parallela ^b ^b 31. primi. alterutri

scilicet
DB una
& ipsi
quadra-
sub AD
ex CD
jiciatur
lum sub
quadrato
dimidia
Quod

Et una
rectan-
etur, &

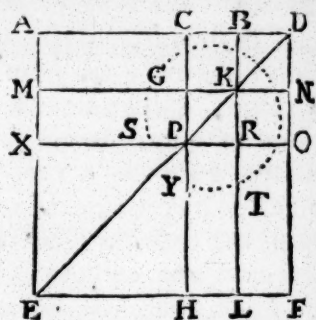
in pun-

æ lateribus
lelogramma
ur construi
lelogramma



B est æqualis BD, & GK ipsi KN; erit rectangulum ^c quidem CK rectangulo BN; rectangulum vero GR ipsi RN æquale ^c. sed CK est ^d æquale RN, complementa enim sunt parallelogrammi CO, ergo & BN æquale est GR, & quatuor ^c 36. primi. ^d 43. primi. rectangula

rectangula BN KC GR RN inter se æqualia; ideoque quadrupla sunt rectanguli CK . rursus quoniam CB est æqualis BD , & BD quidem ipsi BK , hoc est ipsi CG æqualis; vero ipsi GK , hoc est GP : erit & CG æqualis GP . est autem & PR ipsi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulum MP , & rectangulum PL ipsi RF æquale erit. sed MP est æquale PL , complementa enim sunt ML parallelogrammi; quare & AG ipsi RF est æquale. quatuor igitur AG MP PL RF inter se æqualia sunt, ac propterea ipsius AG quadrupla. ostensum autem est, & quatuor CK BN GR RN quadrupla esse CK . quare octo continentia gnomonem STY ipsius AK quadrupla sunt, & quoniam AK est quod sub AB BC continetur; etenim BK est æqualis BC ; erit contentum quater sub AB BC ipsius AK quadruplum. at demonstratum est gnomon STY quadruplus ipsius AK . quod igitur quater sub AB BC continetur æquale est gnomoni STY . commune apponatur XH , quod quidem quadrato ex AC est æquale; ergo quod quater sub AB BC continetur una cum quadrato ex AC æquale est ipsi STY gnomoni, & quadrato XH . sed STY gnomon, & XH totum sunt $AEDF$ quadratum, quod describitur ex AD . rectangulum igitur quater sub AB BC contentum unà cum quadrato ex AC æquale est ei, quod ex AD , hoc est ex AB BC tanquam ex una linea describitur, quadrato. Ergo si recta linea utcumque secta fuerit; quod quater sub toto, & una parte continetur rectangulum, una cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato, quod ex tota & dicta parte, tanquam ex una linea describitur. Quod ostendendum fuerat.



PROP. IX. THEOR.

Si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit; quadrata quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter sectiones interjicitur.

Recta enim linea quævis AB secta sit in partes æquales ad C , & in partes inæquales ad D . dico quadrata ex AD DB , quadratorum ex AC CD dupla esse. Ducatur enim a puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE , & utrivis ipsarum

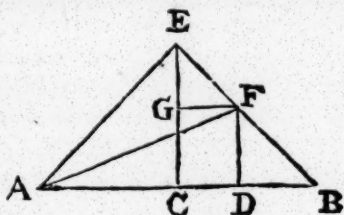
a 43. primi.

e Gor. 4.
hujus.

a 11. primi.

AC

AC CB æqualis ponatur, junganturque EA EB. ac per D quidem ipsi CE parallela ^b ducatur DF; per F vero ipsi AB ^b 31. primi. parallela ^b FG; & AF ducatur. Itaque quoniam AC est æqualis CE; erit ^c & angulus EAC angulo AEC æqualis. ^c 5. primi. & cum rectus sit angulus ad C, reliqui AEC EAC uni recto æquales ^d erunt. & sunt æquales inter sese. utervis ^d 3. Cor. 32. primi.



igitur ipsorum AECEAC recti est dimidium. eadem ratione, & recti dimidium est utervis ipsorum CEBEC. ergo totus angulus AEB rectus est. & quoniam angulus GEF dimidium est recti, rectus autem EGF, æqualis enim ^e est interiori & opposito ECB, erit, & reliquus EFG recti dimidium: æqualis igitur est GEF angulus ipsi EFG. quare & latus EG lateri GF est ^f æquale. rursus quoniam angulus ad B dimidium est recti, rectus autem FDB, quod sit æqualis interiori & opposito ECB; reliquus BFD recti erit dimidium. angulus igitur ad B æqualis est angulo BFD; ideoque latus DF lateri DB æquale. & quoniam AC est æqualis CE, erit & ex AC quadratum æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla sunt quadrati ex AC; quadratis autem ex AC CE æquale ^g est quadratum ex EA, siquidem rectus est angulus ACE. ergo quadratum ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam EG æqualis est GF, & quadratum ex EG quadrato ex GF est æquale. quadrata igitur ex EG & GF dupla sunt quadrati ex GF. at quadratis ex EG GF æquale ^g est quod ex EF quadratum. ergo quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. æqualis ^h autem est GF ipsi CD. ^h 34. primi. quadratum igitur ex EF duplum est quadrati CD. sed & quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla sunt quadratorum ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale ^g est ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus est. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD est duplum. sed quadrato ex AF æqualia sunt ex AD DF quadrata. rectus enim est angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla sunt quadratorum ex AC CD. est autem DF ipsi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit; quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata, dupla sunt & quadrati dimidæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter sectiones interjicitur. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. X. THEOR.

Si recta linea secetur bifariam, & ipsi in directum quævis recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta constat, tanquam ab una linea describitur.

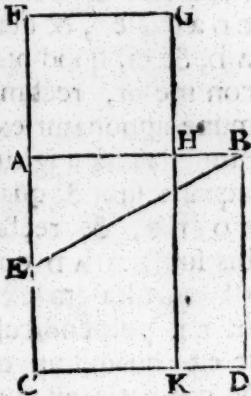
Recta enim linea AB secetur bifariam in C , & ipsi in directum adjiciatur quævis recta linea BD . dico quadrata ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla esse. Ducatur enim a puncto C ipsi AB ad rectos a angulos CE , & utrivis ipsarum AC CB æqualis ponatur; ducaturque AE EB , & per E quidem ipsi AD parallela b ducatur EF ; per D vero ducatur DF parallela b ipsi CE . & quoniam in parallelas EC FD , recta quædam linea EF incidit, anguli CEF EFD æquales c sunt duobus rectis. anguli igitur FEB EFD duobus rectis sunt minores. quæ autem à minoribus quam sunt duo recti in infinitum producantur, conveniunt inter se d . ergo EB FD productæ ad partes BD convenient. producantur, & convenient in puncto G , & AG ducatur. itaque quoniam AC est æqualis CE , & angulus AEC angulo EAC æqualis e erit: atque est rectus qui ad C . uterque igitur ipsorum CAE AEC est recti dimidium. eadem ratione, & recti dimidium est uterque CEB EBC . ergo AEB est rectus. & quoniam EBC est dimidium recti, erit & recti f dimidium DBG ; cum sit ad verticem. sed & BDG rectus est; etenim est c æqualis ipsi DCE alterno. reliquus igitur DGB dimidium est recti, & ob id ipsi DBG æqualis. ergo & latus BD æquale g lateri DG . rursus quoniam EGF est dimidium recti, rectus autem qui ad F , est enim angulo opposito qui ad C æqualis; erit, & reliquus FEG recti dimidium, & æqualis ipsi EGF . quare & latus GF lateri EF est æquale g . & cum EC sit æqualis CA ; & quadratum ex EC æquale est ei quod ex CA fit quadrato. ergo quadrata ex EC CA dupla sunt quadrati ex CA . quadratis autem ex EC CA æquale b est quadratum ex EA . quadratum igitur ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam GF est æqualis FE , æquale est, & ex GF quadratum quadrato ex FE . quadrata igitur ex GF FE quadrati ex EF sunt dupla. at quadratis ex GF FE æquale est.

est ^b quod ex EC quadratum. ergo quadratum ex EG duplum est quadrati ex EF . æqualis autem est EF ipsi CD . quadratum igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. sed ostensum est quadratum ex EA duplum quadrati ex AC . ergo ex AE EG quadrata, quadratorum ex AC CD sunt dupla. quadratis vero ex AE EG æquale est ^b quod ex AG quadratum. quadratum igitur ex AG duplum est quadratorum ex AC CD . at quadrato ex AG æqualia ^b sunt ex AD DG quadrata. ergo quadrata ex AD DG sunt dupla quadratorum ex AC CD . sed DG est æqualis DB . quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, & ipsi in directum quædam recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjuncta, & adjuncta fiunt utraque quadrata, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea quæ ex dimidia & adjuncta constat tanquam ab una linea describitur. Quod ostendere oportebat.

PROP. XI. THEOR.

Datam rectam lineam secare, ita ut quod sub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.

Sit data recta linea AB . oportet ipsam AB ita secare, ut quod sub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Describatur ^a enim ex AB quadratum $ABCD$, seceturque AC bifariam in E , & BE ducatur: deinde producta CA in F , ^a 46. primi ponatur ipsi BE æqualis EF : describaturque ex AF quadratum $FGHA$, & GH ad K producat. dico AB sectam esse in H , ita ut sub AB BH rectangulum æquale sit quadrato ex AH . Quoniam enim recta linea AC bifariam secatur in E , adjiciturque ipsi in directum AF , rectangulum sub CF FA , una cum quadrato ex AE , æquale ^b erit quadrato ex EF . sed EF est æqualis EB . rectangulum igitur sub CF FA , una cum quadrato ex AE æquale est ei, quod fit ex EB , quadrato. quadrato autem ex EB æqualia sunt ^c quadrata ex BA AE : etenim angulus ad A rectus est. ergo rectangulum sub CF FA , una cum quadrato ex AE æquale est quadratis ex AB AE ; commune auferatur quod ex AE fit quadratum; reliquum igitur rectangulum sub CF FA æquale est quadrato ex AB . est autem rectangulum FK sub



^b 6. hujus.

^c 47. primi.

D

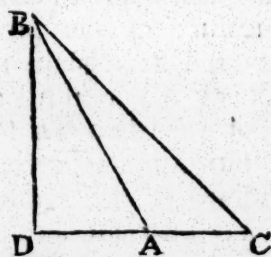
CF FA

CF FA; liquidem AF est æqualis FG; quadratum autem ex AB est ipsum AD. rectangulum igitur FK æquale est quadrato AD. commune auferatur AK. ergo reliquum FH reliquo HD est æquale. atque est HD rectangulum sub AB BH, cum AB sit æqualis BD, & FH est quadratum ex AH. rectangulum igitur sub AB BH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB secta est in H, ita ut sub AB BH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. Quod facere oportebat.

PROP. XII. THEOR.

In obtusangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum, majus est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum ABC, obtusum angulum habens BAC: & ducatur ^a à puncto B ad CA protractam perpendicularis BD. dico quadratum ex BC majus esse, quam quadrata ex BA AC, rectangulo quod bis sub CA AD continetur. Quoniam enim recta linea CD secta est utcumque in puncto A, erit quadratum ex CD æquale ^b, & quadratis ex CA AD, & ei, quod bis sub CA AD continetur, rectangulo. commune apponatur ex DB quadratum. quadrata igitur ex CD DB æqualia sunt & quadratis ex CA AD DB, & rectangulo quod bis sub CA AD continetur. sed quadratis ex CD DB æquale est ^c quadratum ex CB, rectus enim est angulus ad D, cum sit BD perpendicularis. quadratis vero ex AD DB æquale est ^c quadratum ex AB. Quadratum igitur ex CB æquale est, & quadratis ex CA AB, & rectangulo bis sub CA AD contento. ergo quadratum ex CB majus est quam quadrata ex CA AB, rectangulo, quod bis sub CA AD continetur. In obtusangulis igitur triangulis, quadratum, quod fit à latere obtusum angulum subtendente, majus est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum



^a 12. primi.

^b 4. hujus.

^c 47. primi.

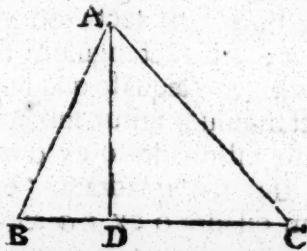
sum angulum, in quod protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

In acutangulis triangulis, quod à latere acutum angulum subtendente fit quadratum, minus est quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutum.

Sit acutangulum triangulum ABC , acutum habens angulum ad B : ducatur à puncto A ad BC perpendicularis AD . a 12. primi.
dico quadratum quod fit ex AC minus esse quam quadrata quæ ex CB BA fiunt, rectangulo quod bis sub CB BD continetur. Quoniam enim recta linea CB secta est utcumque in D , erunt

quadrata ex CB BD æqualia b , & rectangulo quod bis sub CB BD continetur, & quadrato ex DC . commune apponatur ex AD quadratum. quadrata igitur ex CB BD DA æqualia sunt, & rectangulo bis sub CB BD contento, & quadratis ex



b 7. hujus.

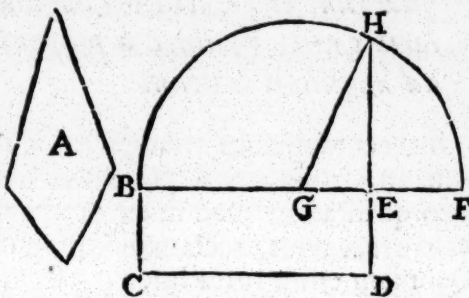
AD DC . sed quadratis ex BD DA æquale est ex AB quadratum; rectus enim angulus est qui ad D . quadratis vero ex AD DC æquale est quadratum ex AC , quadrata igitur ex CB BA sunt æqualia quadrato ex AC , & ei quod bis sub CB BD continetur rectangulo. quare solum quadratum ex AC minus est quam quadrata ex CB BA , rectangulo quod bis sub CB BD continetur. In acutangulis igitur triangulis quadratum quod à latere acutum angulum subtendente fit, minus est quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutum. Quod demonstrare oportebat.

c 47. primi.

PROP. XIV. PROBL.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A. oportet ipsi A rectilineo æquale
 a 45. primi. quadratum constituere. Constituatur a rectilineo A æquale
 parallelogrammum rectangulum BCDE. si igitur BE est æ-
 qualis ED, factum jam erit quod proponebatur, etenim
 rectilineo A æquale quadratum constitutum est BD: sin mi-
 nus, una ipsarum BE ED major est. sit BE major; & pro-
 ducatur ad F, ponatur-
 que ipsi ED æqualis
 EF. deinde secta FB bi-
 fariam b in G: centro qui-
 dem G, intervallo autem
 unius ipsarum GB GF
 semicirculus describatur
 BHF; producaturque
 DE in H, & GH ducatur.
 Quoniam igitur re-
 cta linea BF secta est in partes æquales ad G, inæquales
 ad E; erit rectangulum sub BE EF, una cum quadrato quod
 c 5. hujus. fit ex EG c, æquale quadrato ex GF. est autem GF æqualis GH;
 rectangulum igitur sub BE EF una cum quadrato ex EG, æ-
 d 47. primi. quale est quadrato ex GH. sed quadrato ex GH æqualia d sunt
 ex HE EG quadrata. ergo rectangulum sub BE EF una
 cum quadrato ex EG æquale est quadratis ex HE EG. com-
 mune auferatur EG quadratum. reliquum igitur rectangu-
 lum sub BE EF est æquale quadrato ex EH. sed rectan-
 gulum sub BE EF est ipsum BD parallelogrammum, quoniam
 EF est æqualis ED. ergo BD parallelogrammum quadrato
 ex EH est æquale. parallelogrammum autem BD est æquale
 rectilineo A. rectilineum igitur A quadrato ex EH descripto
 æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum con-
 stitutum est, quod videlicet ex ipsa EH describitur. Quod
 facere oportebat.



EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

I.

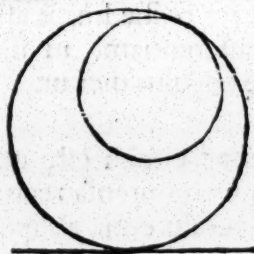
ÆQUALES circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum quæ ex centris sunt æquales.

II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, & producta, ipsum non fecat.

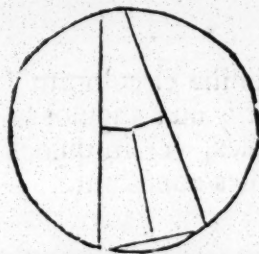
III.

Circuli contingere se dicuntur, qui contingentes, se ipsos non secant.



IV.

In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ sunt æquales.



V.

Magis autem distare à centro dicitur ea, in quam major perpendicularis cadit.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

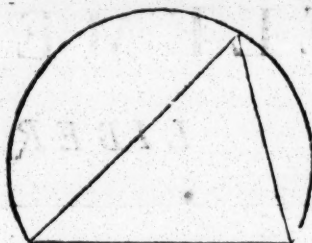
VI.

Segmentum circuli est figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



VII.

Segmenti autem angulus est, qui recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur.



VIII.

In segmento angulus est, quando in circumferentia segmenti sumatur aliquod punctum, atque ab ipso ad terminos lineæ ejus, quæ basis est segmenti, rectæ lineæ ducantur, angulus ductis lineis contentus.



IX.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ assumunt circumferentiam, in illa consistere angulus dicitur.

X.

Sector circuli est, quando angulus ad centrum constituitur, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, & circumferentia ab ipsis assumpta.

XI.

Similia circulorum segmenta sunt, quæ angulos fuscipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales consistunt.

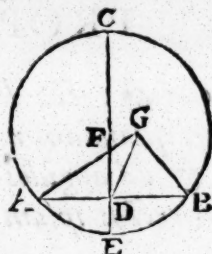


PROP.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus ABC , oportet circuli ABC centrum invenire. Ducatur in ipso quædam recta linea AB utcunque, & in puncto D bifariam ^a secetur, à puncto autem D ipsi AB ad rectos angulos ^b ducta DC in E producat; & secetur CE bifariam ^a in F dico punctum F circuli ABC centrum esse. Non enim, sed si fieri potest, sit G centrum, & $GA GD GB$ ducantur. itaque quoniam DA est æqualis DB , communis autem DG , erunt duæ $AD DG$ duabus $GD DB$ æquales, altera alteri: & basis GA æqualis ^c est basi GB ; sunt enim ex centro G . angulus igitur ADG angulo GDB est ^d æqualis. cum autem recta linea super rectam lineam insistens, angulos qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, ^e rectus est uterque æqualium angulorum. ergo angulus GDB est rectus. sed & rectus FDB . æqualis igitur est angulus FDB angulo GDB , major minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli ABC centrum. similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F . ergo F centrum est circuli ABC . Quod invenire oportebat.



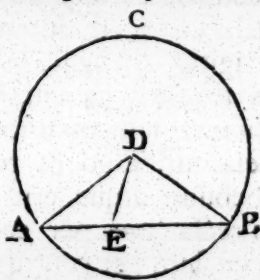
^c Def.
^{15. primi.}
^d 8. primi.
^e Def.
^{10. primi.}

Cor. Si in circulo quævis recta linea, lineam quandam bifariam & ad angulos rectos secet, in secantē erit centrum circuli.

PROP. II. THEOR.

Si in circumferentia circuli duo quævis puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus ABC ; in circumferentia ipsius sumantur duo quævis puncta $A B$. dico rectam lineam quæ à puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. sumatur enim in recta AB punctum quodvis E , & jungantur $DA DE DB$. Quoniam DA est æqualis DB , erit ^a angulus DAB æqualis angulo DBA , & quoniam trianguli DAE latus AE producitur, erit ^b angulus DEB angulo DAE major, angulus autem DAE æqualis est angulo DBE , ergo DEB angulus angulo DBE est



^a 5. primi.

^b 16. primi.

D_4

est

c 19. pr. mi. est major. sed majori angulo majus latus subtenditur. major igitur est DB ipsa DE. sed DB ad circumferentiam tantum pertingit. ergo DE non eo usque protenditur. adeoque punctum E cadet intra circulum. Si igitur in circumferentia &c. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Hinc si recta circulum tangat, in unico puncto eum tangit.

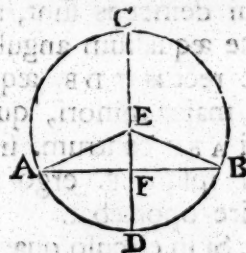
PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta linea per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit; quod si ad angulos rectos ipsam secet, & bifariam secabit.

Sit circulus ABC, & in ipso recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam secet in puncto F. dico ad angulos rectos ipsam secare. Sumatur enim circuli

a 1. hujus.

ABC centrum a quod sit E, & EA EB jungantur. Quoniam igitur AF est æqualis FB, communis autem FE, duæ AF FE duabus BF FE æquales sunt, & basis EA basi EB est æqualis. ergo & angulus AFE angulo BFE æ-



b 8. primi.

c Def. 10. primi.

qualis erit. cum autem recta linea super rectam insistens angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum. uterque igitur AFE BFE est rectus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secans, & ad angulos rectos ipsam secabit. Si vero CD secet AB ad rectos angulos, dico & bifariam ipsam secare, hoc est AF ipsi FB æqualem esse. iisdem enim constructis, quoniam EA, quæ

d 5. primi.

ex centro, est æqualis EB, & angulus EAF angulo EBF æqualis erit; est autem & AFE rectus æqualis recto BFE. duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duobus angulis æquales habent, unumque latus uni lateri æquale EF, commune scilicet utrisque, quod uni angulorum æqualium subtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. atque erit AF ipsi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ipsam secet ad rectos angulos, & bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

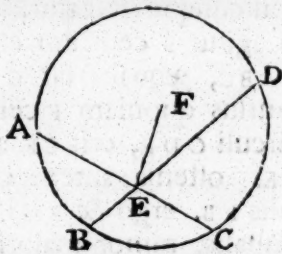
PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secant non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt.

Sit circulus $ABCD$; & in ipso duæ rectæ lineæ AC BD se invicem secant in puncto E , non ductæ per centrum. dico eas sese bifariam non secare. si enim fieri potest, secant sese bifariam, ita ut AE sit æqualis

EC , & BE ipsi ED : sumaturque a centrum $ABCD$ circuli, quod sit F , & EF jungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, & ad



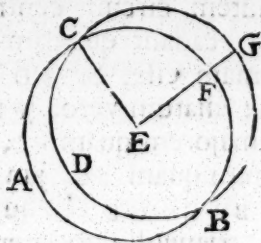
a 1. hujus.

rectos angulos ipsam secabit b . quare rectus est FEA angulus. rursus quoniam recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrum bifariam secat, & ad angulos rectos ipsam b secabit. rectus igitur angulus est FEB . ostensus autem est rectus & FEA . ergo FEA angulus ipsi FEB æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur AC BD sese bifariam secant. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secant non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt. Quod ostendere oportebat.

PROP. V. THEOR.

Si duo circuli se invicem secant, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli se invicem secant ABC CDG in punctis B , C . dico ipsorum idem centrum non esse. Si enim fieri potest, sit centrum E ; jungaturque EC , & EG utcumque ducatur. Quoniam E centrum est circuli ABC , erit CE ipsi



EF æqualis. rursus quoniam E centrum est CDG circuli, æqualis est CE ipsi EG . sed ostensa est CE æqualis EF . ergo

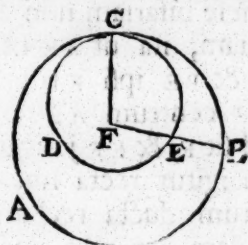
EF ipsi EG æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC CDG . Quare si duo circuli se invicem secant, non erit ipsorum idem centrum. Quod ostendendum fuit.

PROP. VI.

PROP. VI. THEOR.

Si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

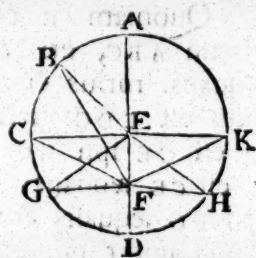
Duo enim circuli ABC CDE contingant sese intra in puncto c . dico ipsorum non esse idem centrum. si enim fieri potest, sit F ; jungaturque FC , & FEB utcumque ducatur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC , æqualis est CF ipsi FB . rursus quoniam F centrum est circuli CDE , erit CF æqualis FE . ostensa autem est CF æqualis FB . ergo & FE ipsi FB est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F punctum centrum est circuloꝝ ABC CDE . Quare si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit. Quod demonstrare oportebat.



PROP. VII. THEOR.

Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quævis rectæ lineæ; maxima quidem erit in qua centrum: minima vero reliquæ: aliarum autem propinquior ei quæ per centrum transit, semper remotiore major est. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus $ABCD$, cujus diameter AD , & in ipsa AD sumatur aliquod punctum F , quod non sit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E : & à puncto F in circulum $ABCD$ cadant quædam rectæ lineæ FB FC FG . dico FA maximam esse, & FD minimam: aliarum vero, FB quidem majorem quam FC , & FC majorem quam FG . jungantur enim BE CE GE . Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora; erunt BE EF majores quam BF . est autem AE æqualis BE . ergo BE EF ipsi AE sunt æquales. major igitur est AF quam BF . rursus quoniam BE est æqualis CE , communis autem FE , duæ BE EF duabus CE EF æquales



20. primi.

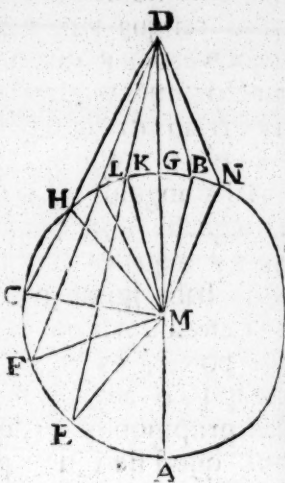
quales sunt. sed $\angle BEF$ angulus major est $\angle CEF$: basis
 igitur BF basi FC est b major. eadem ratione & CF major b 24. primi.
 est quam FG . rursus quoniam GF & FE majores a sunt quam a 20. primi.
 GE , æqualis autem GE ipsi ED ; erunt GF & FE majores quam
 ED . communis auferatur FE . ergo reliqua GF major est
 quam reliqua FD . maxima igitur est FA , & FD minima:
 major vero BF quam FC , & FC quam FG major. dico & à
 puncto F duas tantum rectas lineas æquales cadere in circulum
 $ABCD$ ad utrasque partes minimæ FD . constituatur enim ad c 23. primi.
 lineam EF atque ad datum in ea punctum E , angulo GEF
 æqualis angulus FEH : & FH jungatur. quoniam igitur GE
 est æqualis EH , communis autem EF , duæ GE & EF duabus
 HE & EF æquales sunt: & angulus GEF est æqualis angulo
 HEF . basis igitur FG basi FH æqualis d erit. dico a puncto d 4. primi.
 F in circulum non cadere aliam ipsi FG æqualem. si enim
 fieri potest, cadat FK & quoniam FK est æqualis FG , est-
 que ipsi FG æqualis FH ; erit & FK ipsi FH æqualis, vide-
 licet propinquior ei, quæ per centrum transit æqualis remo-
 tiori, quod fieri non potest. Si igitur in circuli diametro a-
 liquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, &c.
 Quod demonstrare oportebat.

PROP. VIII. THEOR.

*Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque
 ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ qua-
 rum una per centrum transeat, aliæ vero utunque:
 earum quidem, quæ in concavâ circumferentiam ca-
 dunt, maxima est quæ per centrum transit; alia-
 rum autem propinquior ei, quæ per centrum, semper
 remotiore major est at earum, quæ in convexam cir-
 cumferentiam cadunt, minima est quæ inter punctum
 & diametrum interjicitur; aliarum vero quæ propin-
 quior minimæ, semper remotiore est minor. duæ autem
 tantum æquales à puncto in circulum cadunt ad u-
 traque partes minimæ.*

Sit circulus ABC , & extra circulum sumatur aliquod
 punctum D : ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ
 quædam DA DE DF DC : sitque DA per centrum. dico
 earum quidem, quæ in concavam $BEFC$ circumferentiam
 cadunt, maximam esse DA , quæ per centrum transit; &
 minimam, quæ inter punctum D & diametrum AG inter-
 jicitur, videlicet DG : majorem autem DE quam DF ; & DF
 majorem

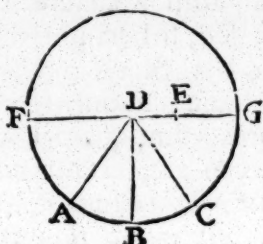
- maorem quam DC : earum vero quæ in convexam circumferentiam $HLKC$ cadunt, quæ propinquior est minimæ DG semper remotiore esse minorem; hoc est DK minorem quam DL , & DL minorem quam DH . sumatur enim centrum circuli ABC , quod sit M , & jungantur $ME MF MC MH ML$. & quoniam AM est æqualis ME , communis apponatur MD . ergo AD est æqualis ipsis $EM MD$. sed $EM MD$ sunt majores b quam ED ergo & AD quam ED est major. rursus quoniam æqualis est ME ipsi MF , communis apponatur MD . erunt $EM MD$ ipsi $MF MD$ æquales; at angulus EMD major est angulo FMD . basis igitur ED basi FD major c erit. similiter demonstrabimus, & FD majorem esse quam CD . ergo maxima est DA ; major autem DE quam DF , & DF quam DC major. præterea quoniam
- d Axiom. 4. $MK KD$ sunt majores b quam MD , & MG est æqualis MK ; erit reliqua KD quam reliqua d GD major. quare GD minor quam KD , & idcirco GD minima est. & quoniam trianguli MLD in uno latere MD , duæ rectæ lineæ $MK KD$ intra constituentur, erunt e $MK KD$ minores ipsis $ML LD$, quarum MK est æqualis ML . reliqua igitur DK minor est quam reliqua DL . similiter ostendemus, & DL quam DH minorem esse. ergo DG minima est. minor vero DK quam DL , & DL minor quam DH . dico etiam duas tantum æquales à puncto D in circulum cadere ad utrasque minimæ partes, constituatur ad rectam lineam MD , ad datumque in ea punctum M , angulo KMD æqualis f angulo DMB , & DB jungatur. itaque quoniam MK est æqualis MB , communis autem MD , duæ $KM MD$ duabus $BM MD$ æquales sunt, altera alteri, & angulus KMD æqualis angulo BMD , basis igitur DK basi DB est æqualis g . dico à puncto D aliam ipsi DK æqualem in circulum non cadere. si enim fieri potest, cadat DN . & quoniam DK est æqualis DN , & DK ipsi DB est æqualis; erit & DB æqualis DN , propinquior scilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. quod ostendere oportebat.



PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod sumitur, circuli centrum erit.

Sumatur enim intra circulum ABC punctum aliquod D : atque à puncto D in circulum ABC cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales $DA DB DC$. dico punctum D , quod sumitur, circuli ABC esse centrum. Non enim; sed, si fieri potest, sit E centrum, & juncta DE in FG producat. ergo FG a diameter est ABC circuli. itaque quoniam in FG diametro circuli ABC sumptum est aliquod punctum D quod non est centrum circuli, maxima quidem erit DG , major ^b autem DC quam DB , & DB quam DA . sed & æquales, ^c quod fieri non potest. non igitur E centrum est circuli ABC . similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse præter ipsum D . ergo D circuli BC centrum erit. Quod oportebat demonstrare.



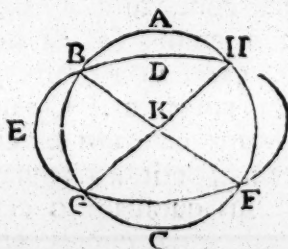
^a Def. 17. primi.

^b 7. hujus. ^c ex hyp.

PROP. X. THEOR.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest circulus ABC circulum DEF secet in pluribus punctis, quàm duobus; nempe in B , G , F , & circuli ABC centrum sumatur, quod sit K , & $KB KG KF$ jungantur. Quoniam igitur intra circulum DEF sumptum est aliquod punctum K , à quo in circulum DEF incident plures quam duæ rectæ lineæ $KB KG KF$ æquales, erit punctum K circuli DEF centrum ^a. est autem & circuli ABC centrum ^b K duorum igitur circulorum, qui sese secant, idem erit K centrum, quod fieri non potest. Quare circulus circulum in pluribus,



^a 9. hujus.

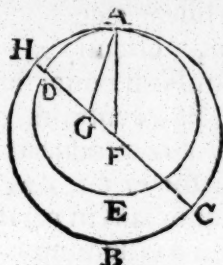
^b Ex hyp.

pluribus quam duobus punctis non secatur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XI. THEOR.

Si duo circuli sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum; recta linea ipsorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.

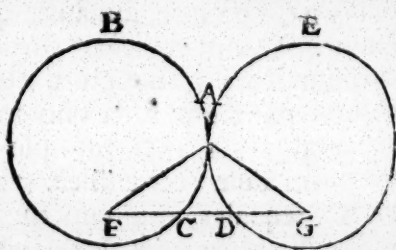
Duo enim circuli ABC ADE sese intus contingant in puncto A , & sumatur circuli quidem ABC centrum quod sit F ; circuli vero ADE centrum G . dico rectam lineam à puncto G ad F ductam, si producat, in punctum A cadere. non enim; sed, si fieri potest, cadat ut $FGDH$. & AF AG jungantur. Itaque quoniam AG GF majores ^a sunt quam FA , hoc est quam FH , communis auferatur FG . reliqua igitur AG major est quam reliqua GH . sed AG est æqualis GD . ergo GD ipsa GH est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet. quare in ipsum cadat necesse est. Si igitur duo circuli sese intus contingant, recta linea ipsorum centra conjungens, si producat, in contactum circulorum cadet. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit.

Duo enim circuli ABC ADE sese extra contingant in puncto A ; & sumatur circuli quidem ABC centrum quod sit F ; circuli vero ADE centrum G . dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A transire. non enim; sed, si fieri potest, cadat ut $FCDG$: & FA AG jungantur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC , erit AF æqualis FC . rursus quoniam G centrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD æqualis. ostensa est autem, & AF æqualis FC . sunt igitur FA AG ipsis FC DG æquales, ergo tota FG major est quam FA AG . sed & minor,



minor α , quod fieri non potest. non igitur à puncto F ad C α 20. primi. ducta recta linea per contactum A non transibit. quare per ipsum transeat necesse est. Si igitur duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra coniungens per contactum transibit. Quod oportebat demonstrare.

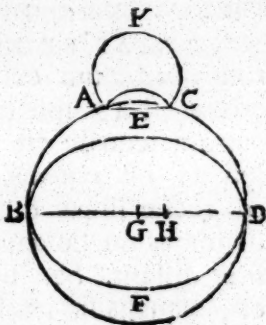
PROP. XIII. THEOR.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quàm uno, sive intus sive extra contingat.

Si enim fieri potest, circulum $ABDC$ circulus $EBFD$ contingat, primum intus, in pluribus punctis quàm uno, videlicet in BD : & sumatur circuli quidem $ABDC$ centrum G , circuli vero $EBFD$ centrum H . ergo recta linea quæ à puncto G ad H ducitur, in puncta α B, D

α 11. hujus.

cadet. cadat ut $BGHD$. & quoniam G centrum est circuli $ABDC$, erit BG ipsi GD æqualis. major igitur est BG quàm HD : & BH quàm HD multo major. rursus quoniam H centrum est $EBFD$ circuli, æqualis est BH ipsi HD . atqui ostensa est ipsa multo major, quod fieri non potest. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quàm uno. dico etiam neque extra contingere. si enim fieri potest, circulus



ACK circulum $ABDC$ extra contingat in pluribus punctis quàm uno, videlicet in AC , & AC jungatur. itaque quoniam in circumferentia utrorumque circulorum $ABDC$ ACK sumpta sunt duo puncta A, C ; recta linea, quæ ipsa coniungit intra utrumque ipsorum cadet β . sed intra circulum quidem $ABDC$ cadit, extra circulum vero ACK , quod est absurdum. Non igitur circulus circulum extra contingit in pluribus punctis quàm uno. ostensum autem est neque intus contingere. circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quàm uno, sive intus, sive extra contingat. Quod oportebat demonstrare.

β 2. hujus.

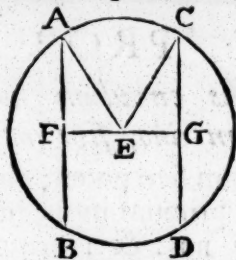
PROP. XIV. THEOR.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant: & quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales.

Sit circulus $ABDC$, & in ipso æquales rectæ lineæ AB, CD . dico eas à centro æqualiter distare. Sumatur enim circuli

$ABDC$

ABDC centrum quod sit B, & ab ipso ad ABCD perpendiculares ducantur EF EG, & AE EC jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit ^a. quare AF est æqualis FB, ideoque AB ipsius AF dupla. eadem ratione, & CD dupla est CG. atque est AB ipsi CD æqualis. æqualis igitur & AF ipsi CG. & quoniam AE est æqualis EC, erit & quadratum ex AE quadrato ex EC æquale. sed quadrato



^b 47. primi. quidem ex AE æqualia sunt ex AF FE quadrata ^b, rectus enim angulus est ad F: quadrato autem ex EC æqualia sunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G sit rectus. quadrata igitur ex AF FE æqualia sunt quadratis ex CG GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG æquale, etenim æqualis est AF ipsi CG. reliquum igitur quod sit ex FE quadratum æquale est reliquo quod ex EG; ac propterea FE ipsi EG est æqualis. in circulo autem æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales ^c sunt. ergo ABCD à centro æqualiter distant. Sed si ABCD æqualiter distent à centro, hoc est, æqualis sit FE ipsi EG; dico AB ipsi CD æqualem esse. iisdem enim constructis, similiter ostendemus AB duplam esse ipsius AF, CD duplam ipsius CG. & quoniam æqualis est AE ipsi EC, erit & ex AE quadratum quadrato ex EC æquale. sed quadrato quidem ex AE æqualia ^b sunt quadrata ex EF FA: quadrato autem ex EC æqualia ^b quadrata ex EG GC. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC æqualia sunt; quorum quadratum ex EG æquale est quadrato ex EF, est enim EG ipsi EF æqualis: reliquum igitur ex AF quadratum æquale est reliquo ex CG. ergo AF ipsi CG est æqualis, atque est AB ipsius AF dupla, & CD dupla ipsius CG. In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant. Et quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales. Quod oportebat demonstrare.

^c 4. def. hujus.

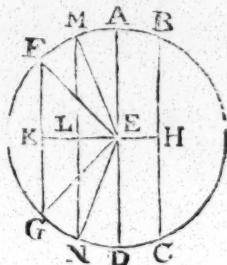
PROP.

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem est diameter : aliarum vero semper propinquior ei quæ per centrum transit, remotiore major est.

Sit circulus $ABCD$, cujus diameter AD , centrum E ; & propinquior quidem diametro AD sit BC ; remotior vero FG . dico AD maximam esse, & BC majorem quam FG . Ducantur enim à centro E ad BC FG perpendiculares EH EK .

& quoniam BC propinquior est ei quæ per centrum transit, remotior autem FG ; erit EK quam EH major. ponatur ipsi EH æqualis EL , & per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM in N producat, & jungatur EM EN EF EG . quoniam igitur EH est æqualis EL , erit & BC ipsi MN æqualis ^a.



^a 14. hujus.

æqualis est AE ipsi EM , & DE ipsi EN , erit & AD ipsis ME EN æqualis. sed ME EN ^b majores sunt quam MN ; ergo & AD major est quam MN : & MN est æqualis BC , erit igitur AD quam BC major. quod cum duæ EM EN duabus FE EG æquales sint, angulusque MEN major angulo FEG , & basis MN basi FG major ^c erit. ostensa autem est MN æqualis BC . ergo & BC quam FG est major. maxima igitur est AD diameter, & BC major quam FG . Quare in circulo maxima est diameter, aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore est major. Quod demonstrare oportebat.

^b 20. primi.

^c 24. primi.

PROP. XVI. THEOR.

Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: & in locum qui inter rectam lineam, & circumferentiam interjicitur altera recta lineæ non cadet: & semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

Sit circulus ABC circa centrum D , & diametrum AB . dico rectam lineam, quæ à puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. non enim;

E

potest,

potest, cadat intus, ut AC , & DC jungantur. itaque quoniam æqualis est DA ipsi DC , erit & angulus DAC angulo ACD æqualis *a*. rectus autem est DAC *b*; ergo & ACD est rectus; ac propterea anguli DAC ACD duabus rectis æquales sunt.

c 17. primi. quod fieri non potest *c*. non igitur à

puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere. extra igitur cadat necesse est. cadat ut AE . dico in locum qui inter rectam lineam AE & circumferentiam CHA interjicitur, alteram rectam lineam non cadere.

si enim fieri potest, cadat ut FA , & à puncto D ad FA perpendicularis *d* ducatur DG . & quoniam rectus est angulus AGD , minor autem recto

d 12. primi. DAG , erit DA quàm DG major *e*. æqualis autem est DA ipsi DH . major igitur est DH ipsa DG , minor

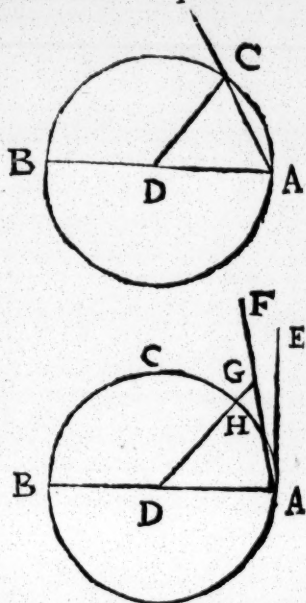
e 19. primi. majore, quod fieri non potest. non igitur in locum qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. dico præterea angulum semicirculi, qui recta linea

BA , & circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero contentum circumferentia CHA , & recta linea AE omni angulo rectilineo esse minorem. si enim est aliquis angulus rectilineus acutus major quidem contento recta linea BA , & CHA circumferentia, aut aliquis minor contento CHA circumferentia, & recta linea AE , in locum qui inter circumferentiam CHA , & rectam lineam AE interjicitur, cadet aliqua recta linea quæ faciet angulum majorem quidem contento recta linea BA & CHA circumferentia, qui scilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia CHA , & AE recta linea, non cadit autem *f*: non igitur erit angulus acutus qui rectis lineis continetur, major angulo contento recta linea BA , & CHA circumferentia; neque minor contento circumferentia CHA , & AE recta linea.

f ex prius demonstratis.

Cor. Ex hoc manifestum est rectam lineam quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circumlum contingere, & rectam lineam contingere circumlum in uno tantum puncto, quoniam quæ occurrit in duobus punctis intra ipsum cadit, ut ostensum est.

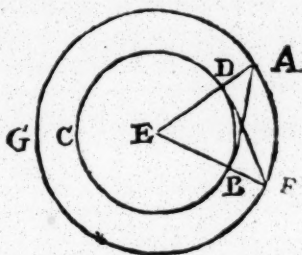
PROP.



PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere quæ datum circumulum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus BCD. oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circumulum BCD contingat. sumatur enim centrum circuli E; & juncta AE, centro quidem E, intervallo autem EA circulus AFG describatur: & à puncto D ipsi EA ad rectos angulos^a ducatur DF: junganturque EBF AB. dico à puncto A ductam esse AB quæ circumulum BCD contingit. quoniam enim E centrum est circumulorum BCD AFG, erit EA æqualis EF, & ED ipsi EB. duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, & angulum communem continent, qui est ad E. ergo basis DF basi AB est^b æqualis, triangulumque DEF æquale triangulo EBA, & reliqui anguli reliquis angulis. æqualis igitur est angulus EBA angulo EDF. & EDF rectus est. quare & rectus EBA: atque est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circumulum contingit^c. ergo AB contingit circumulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB quæ circumulum BCD contingit. Quod facere oportebat.



^a 11. primi.

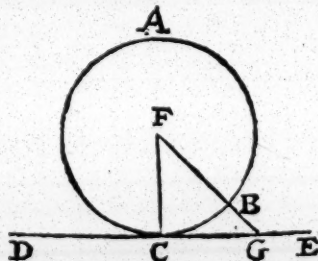
^b 4. hujus.

^c Cor. 16. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si circumulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: & circuli ABC centrum sumatur F, à quo ad C ducatur FC. dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse. si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis^a FG. quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus^b, ac propterea FGC angulus major angulo FCG. majorem autem angulum majus latus^c subtendit. major igitur est FC quàm FG. æqualis autem FC ipsi FB ergo



^a 12. primi.

^b 32. primi.

^c 19. primi.

E 2

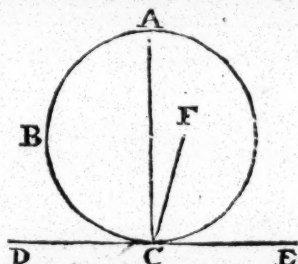
ergo

ergo FB ipsa FG est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur FG est perpendicularis ad DE , similiter ostendemus neque aliam quampiam esse præter ipsam FC . ergo FC ad DE est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

PROP. XIX. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur: in ea circuli centrum erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in C , & à puncto C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA . dico in ipsa AC circuli centrum esse. non enim; sed, si fieri potest, fit F centrum, & jungatur CF . quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea DE , & à centro ad contactum ducta est FC ; erit FC ad ipsam DE perpendicularis ^a. rectus igitur angulus est FCE . est autem & ACE rectus ^b. ergo FCE angulus est æqualis angulo ACE , minor majori, quod fieri non potest. non igitur F centrum est ABC circuli. similiter ostendemus neque aliud aliquod esse præterquam in ipsa AC . Quare si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum. Quod demonstrare oportebat.



^a 18. hujus.

^b Ex hyp.

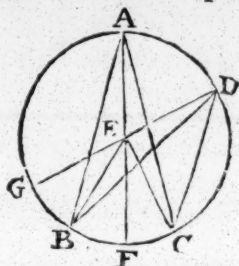
PROP. XX. THEOR.

In circulo angulus, qui ad centrum, duplex est ejus qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant.

Sit circulus ABC , ad cujus centrum quidem angulus sit BEC , ad circumferentiam vero BAC , & eandem circumferentiam BC pro basi habeant. dico BEC angulum anguli BAC duplum esse. jungatur enim AE , & ad F producat. itaque quoniam EA est æqualis EB , erit & angulus EAB angulo EBA æqualis. anguli igitur EAB EBA duplices sunt ipsius

^a 5. primi.

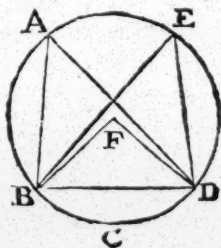
ipſius anguli EAB ; ſed angulus BEF eſt æqualis $\angle$ angulis $\angle$ 32. primi. $EABEBA$; ergo BEF angulus anguli EAB eſt duplex. eadem ratione & angulus FEC duplex eſt ipſius EAC . totus igitur BEC totius BAC duplex erit. rursus inſectatur, & ſit alter angulus BDC , junctaque DE ad G producat. ſimiliter oſtendemus angulum GEC anguli GDC duplum eſſe; quorum GEB duplus eſt ipſius GDB . ergo reliquus BEC reliqui BDC eſt duplus. In circulo igitur angulus qui ad centrum, duplex eſt ejus qui ad circumferentiam eſt, quando circumferentiam eandem pro baſi habeant. Quod oportebat demonſtrare.



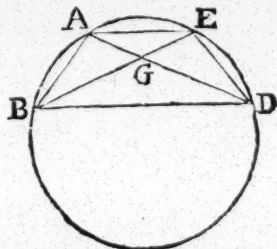
PROP. XXI. THEOR.

In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli inter ſe æquales ſunt.

Sit circulus $ABCDE$, & in eodem ſegmento $BAED$ anguli ſint BAD BED . dico eos inter ſe æquales eſſe. ſumatur enim circuli $ABCDE$ centrum quod ſit F : junganturque BF FD . Quoniam angulus quidem BFD eſt ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, & circumferentiam eandem BCD pro baſi habent; erit BFD angulus $\angle$ anguli BAD duplus. eadem ratione angulus BFD duplus eſt etiam anguli BED . ergo angulus BAD angulo BED æqualis erit. ſi anguli BAD BED ſunt in ſegmento minore ſemicirculo, ducatur AE , eruntque omnes anguli trianguli ABG æquales $\angle$ omnibus angulis trianguli DEG . & anguli ABE ADE ſunt æquales per hætenus demonſtrata, & anguli AGB DGE ſunt etiam æquales, ad verticem enim ſunt: quare & reliquus BAG reliquo GED æqualis erit. In circulo, igitur qui in eodem ſegmento ſunt, anguli inter ſe æquales ſunt. Quod oportebat demonſtrare.



$\angle$ 20. hujus.



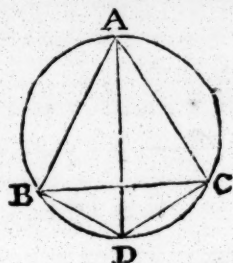
$\angle$ 32. primi.

$\angle$ 15. primi.

PROP. XXII. THEOR.

Quadrilaterorum quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

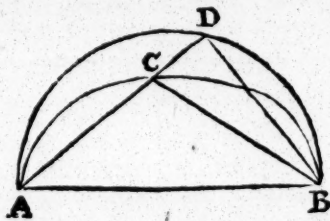
Sit circulus $ABDC$, & in ipso quadrilaterum $ABDC$ dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Jungantur AD BC : quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales ^a, erunt trianguli ABC tres anguli CAB ABC BCA æquales duobus rectis. sed angulus ABC est æqualis ^b angulo ADC , in eodem enim sunt segmento $ABDC$. & angulus ACB æqualis ^b ipsi ADB , quod sunt in eodem $ACDB$ segmento: totus igitur angulus BDC angulis ABC ACB æqualis est. communis apponatur BAC angulus; erunt anguli BAC ABC ACB angulis BAC BDC æquales. sed BAC ABC ACB sunt æquales ^a duobus rectis. ergo & anguli BAC BDC duobus rectis æquales erunt. similiter ostendemus angulos quoque ABD ACD duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XXIII. THEOR.

Super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ex eadem parte non constituentur.

Si enim fieri potest, super eadem recta linea AB duo circulorum segmenta similia, & inæqualia constituentur ex eadem parte ACB ADB ; ducaturque ACD , & CB BD jungantur. itaque quoniam segmentum ACB simile est segmento ADB , similia autem circulorum segmenta sunt quæ angulos fuscipiunt ^a æquales; erit ACB angulus æqualis angulo ADB , exterior interiori, quod fieri non potest ^b. Non igitur super eadem recta linea, duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ex eadem parte constituentur. Quod demonstrare oportebat.

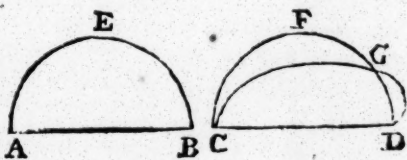


PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

Super æqualibus rectis lineis similia circularum segmenta inter se æqualia sunt.

Sint enim super æqualibus rectis lineis AB CD similia circularum segmenta AEB CFD . dico segmentum AEB segmento CFD æquale esse. applicato enim AEB segmento segmento CFD , & posito puncto quidem A in C , recta vero linea AB in CD ; congruet & B punctum puncto D , propterea quod AB ipsi CD sit æqualis. congruente autem recta linea AB rectæ CD ; congruet & AEB seg-



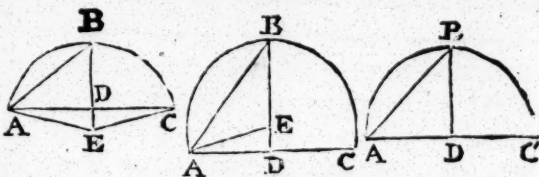
mentum segmento CFD . si enim AB congruet ipsi CD , segmentum autem AEB segmento CFD non congruet, sed permutabitur ut CGD , circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. etenim circulus C, G, D circulum CFD secat in pluribus punctis quàm duobus, videlicet in punctis C, G, D , quod fieri non potest. non igitur congruente recta linea AB rectæ CD , non congruet & AEB segmentum segmento CFD . quare congruet, & ipsi æquale erit. Super æqualibus igitur rectis lineis similia circularum segmenta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare. a 10. hujus.

PROP. XXV. PROBL.

Circuli segmento dato describere circulum cujus est segmentum.

Sit datum circuli segmentum ABC . oportet describere circulum cujus ABC est segmentum. Secetur AC bifariam ^a in D ; & à puncto D ipsi AC ad rectos ^a 10. primi. angulos ducatur ^b

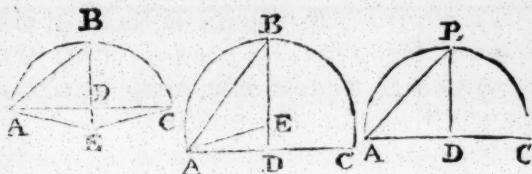
DB , & AB jungatur. vel igitur angulus ABD major est angulo BAD , vel minor, vel ipsi æqualis. sit primum major, & ad rectam



lineam BA , atque ad datum in ea punctum A constituatur angulus BAE æqualis ^c angulo ABD ; & DB ad E producat, ^c 23. primi. jungaturque EC . quoniam igitur angulus ABE est æqualis ^c angulo

d 6. primi. angulo BAE , *d* erit & BE recta linea ipsi EA æqualis: & quoniam AD est æqualis DC , communis autem DE , duæ AD DE duabus CD DE æquales sunt, altera alteri; & angulus ADE æqualis angulo CDE , rectus enim uterque est. ergo & basis AE basi

e 4. primi. EC est æqualis. sed ostensa est AE æqualis EB . quare & BE ipsi EC est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE EB EC inter se æquales sunt. centro igitur E , intervallo autem unâ ipsarum AE EB EC circulus descriptus etiam per reliqua *f* transibit puncta, & circulus descriptus erit. quare circuli segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. sed & illud constat, segmentum ABC semicirculo minus esse; propterea quod centrum ipsius extra cadit. *g* similiter, & si angulus ABD sit æqualis angulo BAD , facta AD æquali utrique ipsarum BD DC , erunt tres rectæ lineæ AD DB DC inter se æquales, atque erit D circuli descripti centrum, & segmentum ABC semicirculus. *h* si vero angulus ABD minor sit angulo BAD ; constituatur ad rectam lineam BA , & ad punctum in ea datum A , angulo ABD æqualis angulus BAE intra segmentum ABC . erit E centrum in ipsa DB , atque erit ABC segmentum semicirculo majus. Circuli igitur segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. Quod facere oportebat.



f 9. hujus.

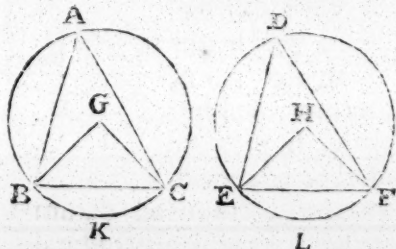
g Cas. 3.
fig. 3.

h Cas. 2.
fig. 2.

PROP. XXVI. THEOR.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistent circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli ABC DEF , & in ipsis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF , ad circumferentias vero BAC EDF . dico BKC circumferentiam circumferentiæ ELF æqualem esse. jungantur enim BC EF . Quoniam æquales sunt ABC DEF circuli, erunt & quæ ex centrīs æquales. duæ igitur BG GC duabus EH HF æquales sunt: & angulus ad G æqualis angulo ad H . ergo & basis



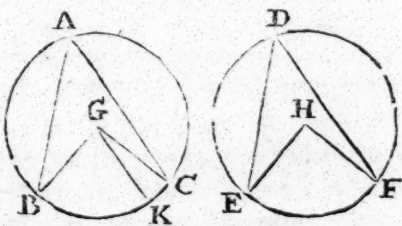
bas BC basi EF est ^a æqualis. rursus quoniam æqualis est ^a 4. primi. angulus ad A angulo ad D , segmentum BAC simile ^b erit ^b Def. 11. segmento EDF : & sunt super æqualibus rectis lineis BC EF . hujus. quæ autem super æqualibus rectis lineis similia sunt circulorum segmenta, inter se æqualia ^c sunt. segmentum igitur BAC segmento EDF est æquale. sed & totus ABC circulus æqualis est toti DEF . ergo & reliqua circumferentia BKC reliquæ ELF æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistant circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare. ^c 24. hujus.

PROP. XXVII. THEOR.

In æqualibus circulis anguli qui æqualibus insistant circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

In æqualibus enim circulis ABC DEF , æqualibus circumferentiis BC EF insistant anguli ad centra quidem BGC EHF , ad circumferentias vero BAC EDF . dico angulum BGC angulo EHF , & angulum BAC angulo EDF æqualem esse.

si quidem igitur angulus BGC æqualis sit angulo EHF , manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF esse æqualem. sin minus, unus ipsorum est major. sit



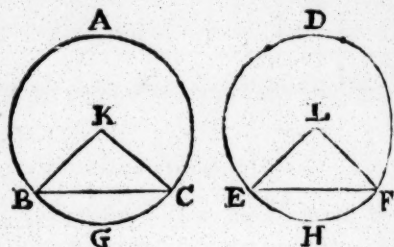
major BGC , & constitutur ad rectam lineam BG , & ad punctum in ipsa G , angulo EHF æqualis ^a angulus BGK . æ ^a 23. primi. quales autem anguli æqualibus insistant ^b circumferentiis, ^b 26. hujus. quando ad centra fuerint. ergo circumferentia BK æqualis est circumferentiæ EF . sed circumferentia EF æqualis est ipsi BC . ergo & BK ipsi BC est æqualis. minor majori, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est angulus BGC angulo EHF : ergo est æqualis. atque est anguli quidem BGC dimidium angulus qui ad A ; anguli vero EHF dimidium qui ad D . angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In æqualibus igitur circulis, anguli qui æqualibus insistant circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli $ABCDEF$; & in ipsis æquales rectæ lineæ BC EF , quæ circumferentias quidem BAC EDF majores auferant, circumferentias vero BGC EHF minores. dico circumferentiam BAC majorem majori circumferentia EDF , & minorem circumferentiam BGC minori EHF æqualem esse. sumantur enim centra a circulorum K , L , junganturque BK KC EL , LF . Quoniam circuli æquales sunt, erunt & quæ ex centrīs æquales b . duæ igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF : & basis BC æqualis est basi EF , ergo angulus BKC angulo ELF est æqualis: æquales autem anguli æqualibus insistant circumferentiis, quando ad centra fuerint d . quare circumferentia BGC æqualis est circumferentiæ EHF , sed & totus ABC circulus toti DEF est æqualis. reliqua igitur circumferentia BAC reliquæ EDF æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XXIX. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.

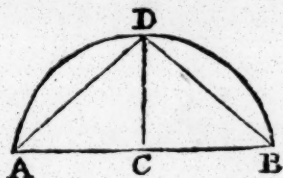
Sint æquales circuli $ABCDEF$: & in ipsis æquales assumantur circumferentiæ BGC EHF , & BC EF jungantur. dico rectam lineam BC rectæ EF æqualem esse. sumantur enim centra a circulorum K , L , & jungantur BK KC EL LF . quoniam igitur circumferentia BGC est æqualis circumferentiæ EHF , erit & angulus BKC angulo ELF æqualis b . & quoniam circuli $ABCDEF$ sunt æquales, & quæ ex centrīs æquales erunt c . duæ igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF ; & æquales angulos continent. quare basis BC basi EF est d æqualis. In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia $A D B$. oportet $A D B$ circumferentiam bifariam secare. Jungatur $A B$, & in C bifariam a secetur: a 10. primi. à puncto autem C ipsi $A B$ ad rectos angulos ducatur $C D$. & jungantur $A D$ $D B$. quoniam igitur $A C$ est æqualis $C B$, communis autem $C D$, duæ $A C$ $C D$ duabus $B C$ $C D$ æquales sunt: & angulus $A C D$ æqualis angulo $B C D$, rectus enim uterque est: ergo basis $A D$ basi $E D$ est b æqualis. æquales autem rectæ lineæ c circumferentias æquales auferunt, quare circumferentia $A D$ circumferentiæ $B D$ æqualis erit. Data igitur circumferentia bifariam secta est. Quod facere oportebat.

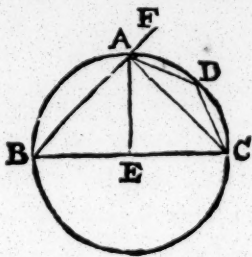


b 4. primi.
 c 28. hujus.

PROP. XXXI. THEOR.

In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est, qui vero in majori segmento, minor est recto, & qui in minori, major recto; & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est, minoris vero segmenti angulus recto minor.

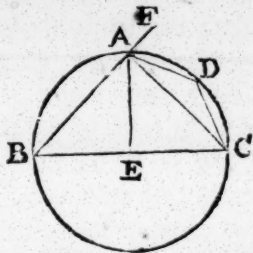
Sit circulus $A B C D$ cujus diameter $B C$, centrum autem E ; & jungantur $B A$ $A C$ $A D$ $D C$. dico angulum quidem qui est in semicirculo $B A C$ rectum esse, qui vero in segmento $A B C$ majore semicirculo, videlicet angulum $A B C$, minorem esse recto, & qui est in segmento $A D C$ minore semicirculo, hoc est angulum $A D C$, recto majorem. jungatur $A E$, & $B A$ ad F producat. itaque quoniam $B E$ est æqualis $E A$, erit & angulus $E A B$, angulo $E B A$ æqualis a . rursus



a 5. primi.

quoniam $A E$ est æqualis $E C$, & angulus $A C E$ angulo $C A E$ æqualis a erit. totus igitur angulus $B A C$ est æqualis duobus $A B C$ $A C B$ angulis, est autem, & angulus $F A C$ extra triangulum $A B C$, duobus $A B C$ $A C B$ æqualis b . angulus igitur $B A C$ est æqualis angulo $F A C$; ac propterea uterque ipsorum rectus c . quare in semicirculo $B A C$ angulus $B A C$ rectus c Def. 10. est. primi.

est. & quoniam trianguli ABC duo anguli ABC BAC duobus rectis sunt d minores, rectus autem BAC , erit ABC angulus recto minor, atque est in segmento ABC majore semicirculo. quod cum in circulo quadrilaterum sit $ABCD$, quadrilaterorum vero qui in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis sint e æquales: erunt ABC ADC anguli æquales duobus rectis, & angulus ABC minor est recto, reliquus igitur ADC recto major erit, atque est in segmento ADC minore semicirculo. dico præterea majoris segmenti angulum qui continetur ABC circumferentia, & recta linea AC recto majorem esse; angulum vero minoris segmenti, contentum circumferentia ADC , & recta linea AC recto minorem. quod quidem perspicue apparet. quoniam angulus qui rectis lineis BA AC continetur rectus est, erit & contentus ABC circumferentia, & recta linea AC recto major. rursus quoniam angulus contentus rectis lineis CA AF rectus est, erit qui continetur recta linea CA , & ADC circumferentia, minor recto. In circulo igitur angulus qui in semicirculo, rectus est, qui vero in majore segmento, minor est recto, & qui in minori, major recto: & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est, minoris vero recto minor. Quod demonstrare oportebat.



Cor. Ex hoc manifestum est, si trianguli unus angulus sit æqualis duobus, eum rectum esse; propterea quod & qui deinceps est, iisdem est æqualis. quando autem anguli deinceps sunt æquales, necessario recti sunt f .

f Def. 10.
primi.

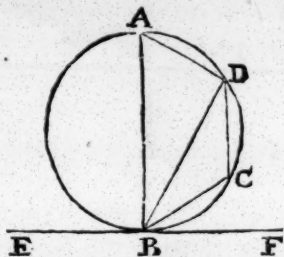
PROP. XXXII. THEOR.

Si circumulum contingat quædam recta linea, à contactu autem in circumulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt iis qui in alternis circuli segmentis consistunt.

Circulum enim $ABCD$ contingat quædam recta linea EF in B , & à puncto B ad circumulum $ABCD$ ducatur recta linea BD ipsum utcumque secans. dico angulos quos BD cum EF contingente facit, æquales esse iis qui in alternis circuli segmentis consistunt. hoc est angulum FBD esse æqualem angulo qui constituitur in DAB segmento, videlicet ipsi

$\cdot DAB$;

DAB; angulum vero DBE æqualem angulo DCB qui in segmento DCB constituitur. ducatur enim à puncto B ipsi EF ad rectos ^a angulos BA: & in circumferentia BD sumatur quodvis punctum c; junganturque AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B, & à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA; erit in ipsa BA centrum ^b ABCD circuli; quare BA ejusdem circuli ^c diameter est, & angulus ADB in semicirculo est ^d rectus. reliqui igitur anguli BAD ABD uni recto ^e æquales sunt. sed & ABF ^f est rectus. ergo angulus ABF æqualis est angulis BAD ABD. communis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei, qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet angulo BAD, est æqualis. & quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, & anguli ejus oppositi æquales ^g sunt duobus rectis; erunt DBF DBE anguli angulis BAD BCD æquales. quorum BAD ostensus est æqualis ipsi DBF; ergo reliquus DBE ei, qui in alterno circuli segmento DCB constituitur, videlicet ipsi DCB, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos facit ad contingentem, æquales erunt iis qui in alternis circuli segmentis consistunt. Quod oportebat demonstrare.



a 11. primi.

b 19. primi.

c Def. 17.

d 31. hujus.

e 32. primi.

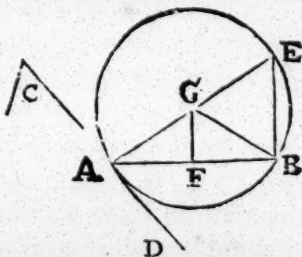
f ex constr.

g 22. hujus.

PROP. XXXIII. PROBL.

Super data recta linea describere segmentum circuli, quod suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus, qui ad C. itaque oportet super data recta linea AB describere segmentum circuli, quod suscipiat angulum æqualem angulo qui est ad C. Ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea datum A, constituatur angulus BAD angulo qui est ad C æqualis ^a. & à puncto A ipsi AD ad rectos angulos ^b ducatur AE; secetur autem AB bifariam ^c in F, atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipsi AB; & GB jungatur. quoniam igitur AF est æqualis FB, communis

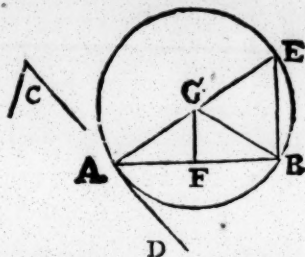


a 23. primi.

b 11. primi.

c 10. primi.

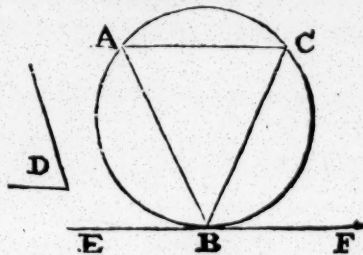
munis autem FG , duæ AF FG duabus BF FG æquales sunt: & angulus AFG æqualis angulo BFG . ergo bāsis AG bāsi GB est d æqualis. itaque centro G , intervallo autem AG circulus descriptus transibit etiam per B . describatur, & sit ABE , jungaturque EB . quoniam igitur ab extremitate diametri AE , & à puncto A , ipsi AE ad rectos angulos ducta est AD ; ipsa AD circulum e continget. & quoniam circulum ABE contingit quædam recta linea AD , & à contactu qui est ad A , in circulum ABE ducta est recta linea AB : erit angulus DAB æqualis f angulo qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet ipsi AEB . sed angulus DAB , angulo ad C est æqualis. ergo & angulus ad C angulo AEB æqualis erit. super data igitur recta linea AB , segmentum circuli descriptum est AEB suscipiens angulum AEB , dato angulo qui est ad C , æqualem. Quod facere oportebat.



PROP. XXXIV. PROBL.

A dato circulo segmentum abscindere quod suscipiat angulum dato rectilineo æqualem.

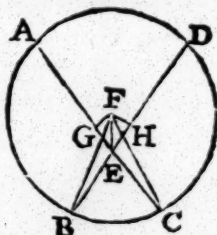
Sit datus circulus ABC , datus autem angulus rectilineus qui ad D . oportet à circulo ABC segmentum abscindere. quod suscipiat angulum angulo ad D æqualem. Ducatur a 17. hujus. recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens: & ad rectam lineam BF , & ad punctum in ea B , constituatur angulus FBC angulo qui est ad D æqualis b . quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B puncto, & à contactu B ducta est BC , erit angulus FBC æqualis c ei qui in alterno circuli segmento constituitur. sed FBC angulus angulo qui ad D est æqualis. ergo & angulus in segmento BAC angulo ad D æqualis erit. A dato igitur circulo ABC , abscissum est segmentum quoddam BAC , suscipiens angulum dato angulo rectilineo qui est ad D , æqualem. Quod facere oportebat.



PROP. XXXV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secant, rectangulum sub segmentis unius contentum, æquale est ei, quod sub alterius segmentis continetur, rectangulo.

In circulo enim $ABCD$, duæ rectæ lineæ AC BD sese mutuo in puncto E secant. dico rectangulum contentum sub AE EC æquale esse ei quod sub DE EB continetur. si AC BD per centrum transeant, ita ut E sit centrum $ABCD$ circuli; manifestum est æqualibus existentibus AE EC DE EB , & rectangulum contentum sub AE EC æquale esse ei quod sub DE EB continetur. si AC DB non transeant per centrum, sumatur centrum circuli $ABCD$ quod sit F ; & ab F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH ; junganturque FB FC FE . quoniam igitur recta quædam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit ^a. quare AG ipsi GC est æqualis. & quoniam recta linea AC secta est in partes æquales in puncto G , & in partes inæquales in E , erit rectangulum sub AE EC contentum, una cum ipsius EG quadrato ^b, æquale qua-



^a 3. hujus.

^b 5. secundi.

drato ex GC . commune addatur ex GF quadratum. ergo rectangulum sub AE EC , una cum iis quæ ex EG GF quadratis, æquale est quadratis ex CG GF . sed quadratis quæ ex EG GF æquale est quadratum ex FE : quadratis vero ex CG GF æquale est quod ex FC fit quadratum. rectangulum igitur sub AE EC , una cum quadrato ex FE , æquale est quadrato ex FC . est autem CF æqualis FB . ergo rectangulum sub AE EC , unà cum quadrato ex FE , æquale est ei quod ex FB fit quadrato. eadem ratione & rectangulum sub DE EB unà cum quadrato ex FE , æquale est quadrato ex FB . ostensum autem est & rectangulum sub AE EC , unà cum quadrato ex FE , æquale ei quod fit ex FB quadrato. ergo rectangulum sub AE EC , unà cum quadrato ex FE , æquale est rectangulo sub DE EB , unà cum quadrato ex FE . commune auferatur FE quadratum. reliquum igitur rectangulum sub AE EC , reliquo sub DE EB rectangulo æquale erit. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secant, rectangulum sub segmentis unius contentum æquale est ei quod sub alterius segmentis continetur. Quod demonstrare oportebat.

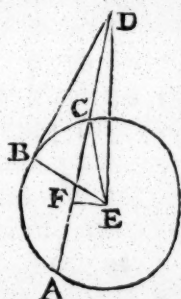
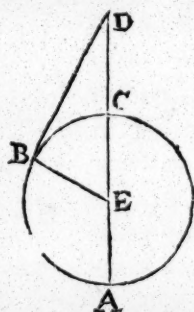
PROP.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secat, altera vero contingat; rectangulum quod sub tota secante, & exterius assumpta inter punctum & curvam circumferentiam continetur, æquale erit ei, quod à contingente fit, quadrato.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D , & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA DB : & DCA quidem circulum ABC fecit; DB vero contingat. dico rectangulum sub AD DC , quadrato, quod fit ex DB , æquale esse. vel igitur DCA per centrum transit, vel non transit. primum transeat per centrum circuli ABC , quod fit

α 18. hujus. $\angle EBD$ rectus α . itaque quoniam recta linea AC bifariam secta est in E , & ipsi adjicitur CD , rectangulum sub AD DC , una cum quadrato ex EC , æquale β erit ei quod fit ex ED quadrato. æ-



qualis autem est CE ipsi EB , ergo rectangulum sub AD DC , una cum quadrato quod ex EB , æquale est quadrato ex ED . α 47. primi. sed quadratum ex ED est æquale quadratis α ipsarum EB BD , rectus enim angulus est EBD . rectangulum igitur sub AD DC , una cum quadrato ex EB , æquale est ipsarum EB , BD quadratis. commune auferatur quadratum quod ex EB ; ergo reliquum sub AD DC rectangulum, quadrato quod fit à contingente DB æquale erit. secundo DCA non transeat per centrum ABC circuli: sumaturque α centrum E , & ad AC perpendicularis agatur EF , & jungantur EB EC ED , rectus igitur est EFD angulus. & quoniam recta linea quædam EF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit α . quare AF ipsi FC est æqualis. rursus quoniam recta linea AC bifariam secta est in F , atque ipsi adjicitur CD , erit rectangulum sub AD DC , una cum quadrato ex FC , æquale β quadrato quod ex FD . commune apponatur quod ex FE quadratum. rectangulum igitur sub

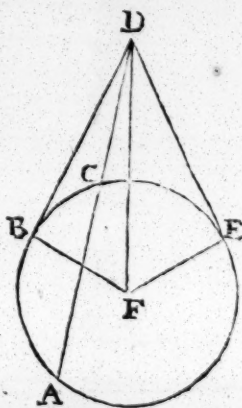
AD DC

AD DC unà cum quadratis ex FC FE est æquale quadratis ex DF FE. sed quadratis quidem ex DF FE. æquale est ex DE quadratum; etenim rectus est angulus EFD: quadratis vero ex CF FE æquale est quadratum ex CE. c 47. primi. ergo rectangulum sub AD DC, unà cum quadrato quod ex CE, est æquale quadrato ex ED; æqualis autem est CE ipsi EB; rectangulum igitur sub AD DC, unà cum quadrato ex EB, æquale est ex ED quadrato. sed quadrato ex ED æqualia sunt quadrata ex EB BD, siquidem rectus est angulus EBD. ergo rectangulum sub AD DC, unà cum quadrato ex EB æquale est eis quæ ex EB BD sunt quadratis. commune auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur sub AD DC rectangulum quadrato quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extra circumulum aliquod punctum sumatur, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si extra circumulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circumulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circumulum secet, altera vero incidat: sit autem, quod sub tota secante, & exterius assumpta inter punctum, & curvam circumferentiam continetur rectangulum, æquale ei quod ab incidente fit quadrato; incidens linea circumulum continget.

Extra circumulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circumulum cadant duæ rectæ lineæ DCA, DB; DCA quidem circumulum secet, DB vero incidat: sitque rectangulum sub AD DC æquale quadrato quod fit ex DB. dico ipsam DB circumulum ABC contingere. Ducatur enim recta linea DE contingens circumulum ABC, & sumatur circuli ABC centrum, quod fit F, junganturque FE FB FD. ergo angulus FED rectus est b. & quoniam DE circumulum ABC contingit, secat autem DCA; rectangulum sub AD DC æquale erit quadrato ex DE. sed rectangulum sub AD DC ponitur æquale quadrato ex DB. quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit. ac propterea linea DE erit ipsi DB æqualis. est autem & FE æqualis FB. duæ igitur DE EF duabus DB BF æquales sunt;



a 17. hujus.

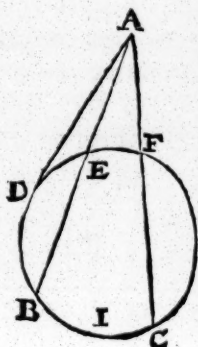
b 18. hujus.

c ex antecedente.

48. primi. sunt; & basis communis FD ; angulus igitur DEF est d æqualis angulo DBF ; rectus autem est DEF , ergo & DBF est rectus. atque est FB producta diameter. quæ vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingit. ergo DB circulum ABC contingat necesse est. similiter demonstrabitur & si centrum sit in ipsa AC . Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, &c. Quod demonstrare oportebat.

Cor. 16.
hujus.

Cor. Hinc si à puncto quovis extra circulum assumpto, plures lineæ rectæ $ABAC$ circulum secantes ducantur; rectangula comprehensa sub totis lineis $ABAC$, & partibus externis $AEAF$, inter se sunt æqualia. nam si ducatur tangens AD , erit rectangulum sub $BAAE$ æquale quadrato ex AD ; & rectangulum sub $CAAF$ eidem quadrato ex AD erit æquale. unde rectangula hæc æqualia erunt.



EUCLIDIS

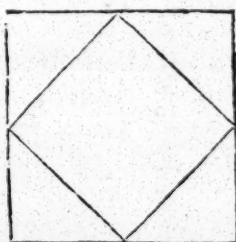
ELEMENTORUM

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

I.

FIGURA rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quando unusquisque figuræ descriptæ angulus, unumquodque latum ejus in qua describitur, contingit.

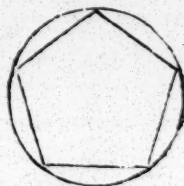


II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur, quando unumquodque latum descriptæ, unumquemque angulum ejus circa quam describitur, contingit.

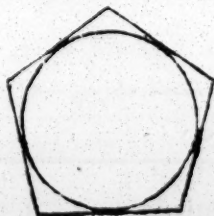
III.

Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando unusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.



IV.

Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando unumquodque latum descriptæ, circuli circumferentiam contingit.



F 2

V.

V.

Circulus similiter in figura rectilinea describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus in qua describitur, contingit.

IV.

Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam describitur, contingit.

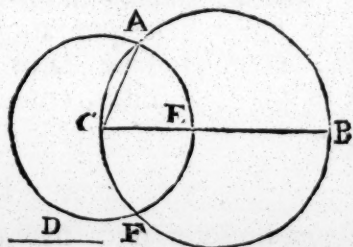
VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentia fuerint.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

In dato circulo, data recta linea quæ diametro ejus major non sit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus ABC , data autem recta linea non major circuli diametro D . oportet in circulo ABC rectæ lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC diameter BC . si quidem igitur BC sit æqualis ipsi D , factum jam erit quod proponebatur. etenim in circulo ABC aptata est BC rectæ lineæ D æqualis. sin minus, major est BC quam D , ponaturque
 * 3. primi. * ipsi D æqualis CE : & centro quidem C intervallo autem CE circulus describatur AEF : & CA jungatur. itaque quoniam punctum C centrum est AEF circuli; erit CA ipsi CE æqualis. sed D est æqualis CE . ergo & D ipsi AC æqualis erit. in dato igitur circulo ABC data rectæ lineæ D , non majori circuli diametro, æqualis aptata est AC . Quod facere oportebat.

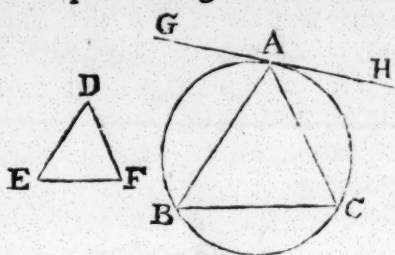


PROP. II. PROBL.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus ABC , datum autem triangulum DEF . oportet in ABC circulo describere triangulum triangulo DEF
 * 17. tertii. æquiangulum. ducatur recta linea GAH contingens * circum-
 lum

lum ABC in puncto A : & ad rectam lineam AH , & ad punctum in ea A , angulo DEF æqualis b angulus constituitur HAC . rursus ad rectam lineam AG , & ad punctum in ipsa A , angulo DFE æqualis b constituitur angulus GAB ; & BC jungatur. quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta HAG ; à contactu autem in circulum



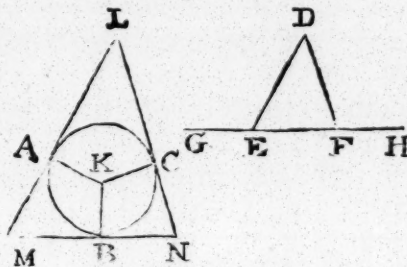
b 23. primi.

ducta est AC : erit HAC angulus æqualis c ei qui in altero circuli segmento consistit, videlicet ipsi ABC . sed HAC angulus æqualis est angulo DEF , ergo & angulus ABC angulo DEF est æqualis. eadem ratione & angulus ACB est æqualis angulo DFE . reliquus igitur BAC angulus reliquo EDF æqualis d erit. ergo triangulum ABC triangulo DEF est æquiangulum, & descriptum est in circulo ABC . In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. III. PROBL.

Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus ABC , datum autem triangulum DEF . oportet circa circulum ABC describere triangulum triangulo DEF æquiangulum. Protrahatur ex utraque parte EF ad puncta H, G , & sumatur circuli ABC centrum K : & recta linea KB utcumque ducatur: constituiturque ad rectam lineam KB , & ad punctum in ea K , angulo quidem DEG æqualis a angulus BKA , angulo autem DFH æqualis a angulus BKC , & per A, B, C , puncta ducantur rectæ lineæ $LAM MBN NCL$ circulum ABC contingentes b .



a 23. primi.

b 17. tertii.

Quoniam igitur circulum ABC contingunt $LM MN NL$ in punctis A, B, C , à centro autem K ad $A B C$ puncta ducuntur $KA KB KC$; erunt anguli ad puncta $A B C$ recti c . & quoniam quadrilateri $AMBK$ anguli quatuor quatuor rectis æquales sunt; etenim in duo triangula dividitur, quorum anguli $KAM KBM$ sunt recti; erunt reliqui $AKB AMB$ duobus rectis æquales. sunt autem & $DEG DEF$ æquales duobus rectis. anguli igitur $AKB AMB$ angulis $DEG DEF$

F 3

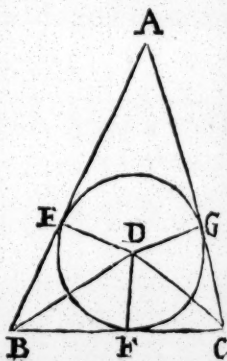
æquales

d 2. Cor. 32. primi. æquales sunt, quorum AKB ipsi DEG est æqualis. ergo reliquus AMB reliquo DEF æqualis erit. similiter demonstrabitur angulus LNB ipsi DFE æqualis. ergo & reliquus MLN est æqualis *d* reliquo EDF . æquiangulum igitur est LMN triangulum triangulo DEF ; & descriptum est circa circulum ABC . Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. IV. PROBL.

In dato triangulo circulum describere.

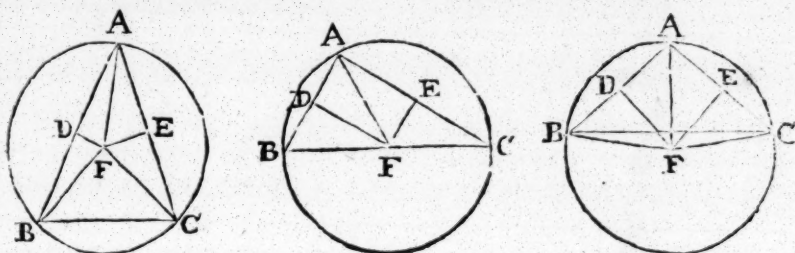
Sit datum triangulum ABC , oportet in triangulo ABC circulum describere. Secentur *a* anguli ABC BCA bifariam rectis lineis BD CD quæ convenient inter se in D puncto: & à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares *b* 12. primi. *b* ducantur DE DF DG . Quoniam angulus EBD est æqualis angulo FBD , est autem & rectus BED recto BFD æqualis: erunt duo triangula EBD DBF , duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale utrique commune BD , quod scilicet uni æqualium angulorum subrenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia *c* 26. primi. *c* habebunt, atque erit DE æqualis DF . & eadem ratione DG æqualis DF . ergo & DE ipsi DG est æqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter se æquales sunt; quare centro D intervallo autem unius ipsarum DE DF DG circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; & rectas lineas AB BC CA continget; propterea quod recti sunt ad E F G anguli. si enim ipsas fecet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod est absurdum *d*. non igitur centro D , intervallo autem unius ipsarum DE DF DG circulus descriptus secabit rectas lineas AB BC CA , quare ipsas continget; atque erit circulus descriptus in triangulo ABC . In dato igitur triangulo ABC circulus EFG descriptus est. Quod facere oportebat.



PROP. V. PROBL.

Circa datum triangulum circulum describere.

Sit datum triangulum ABC . oportet circa datum triangulum ABC . circulum describere. Secentur $ABAC$ bifariam ^{a 10. primi.} in D, E punctis: & à punctis D, E ipsis $ABAC$ ad rectos angulos ^{b 11. primi.} ducantur DF, EF quæ quidem vel intra triangulum ABC convenient, vel in recta linea BC , vel extra ipsam. convenient primo intra triangulum in puncto F : &



BF, FC, FA jungantur. quoniam igitur AD est æqualis DB , communis autem & ad rectos angulos DF ; erit basis AF basi FB æqualis ^{c 4. primi.}. similiter ostenderetur & CF æqualis FA . ergo & BF est æqualis FC . tres igitur FA, FB, FC inter se æquales sunt. quare centro F , intervallo autem unius ipsarum FA, FB, FC circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atque erit circulus descriptus circa triangulum ABC . & describatur ut ABC . secundo DF, EF conveniunt in recta linea BC , in puncto F , ut in secunda figura, & AF jungatur. similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. postremo DF, EF convenient extra triangulum ABC rursus in F puncto, ut in tertia figura: & jungantur AF, FB, FC . & quoniam rursus AD est æqualis DB , communis autem & ad rectos angulos DF , basis AF basi FB æqualis erit. similiter demonstrabimus & CF ipsi FA æqualem esse. quare & BF est æqualis FC . rursus igitur centro F , intervallo autem unius ipsarum FA, FB, FC circulus descriptus & per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum ABC descriptus. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

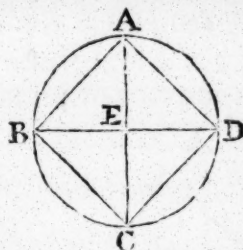
Cor. Si triangulum sit rectangulum centrum circuli cadet in latus angulo recto oppositum. si acutangulum cadet centrum intra triangulum. si obtusangulum cadet extra.

PROP. VI. PROBL.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus $ABCD$. oportet in $ABCD$ circulo quadratum describere. Ducantur circuli $ABCD$ diametri ad rectos angulos inter se AC BD ; & AB BC CD DA jungantur.

Quoniam igitur BE est æqualis ED , etenim centrum est E , communis autem, & ad rectos angulos EA ; erit basis

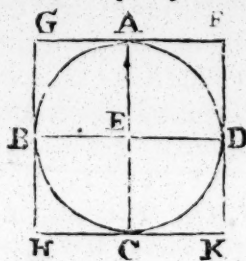


- a 4. primi. BA æqualis a basi AD . & eadem ratione utraque ipsarum BC CD utriq; BA AD est æqualis; æquilaterum igitur est $ABCD$ quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim recta linea BD diameter est $ABCD$ circuli, erit BAD semicirculus. quare angulus BAD rectus b est. & eadem ratione unusquisque ipsorum ABC BCD CDA est rectus. rectangulum igitur est $ABCD$ quadrilaterum. ostensum autem est, & æquilaterum esse. ergo quadratum necessario erit, & descriptum est in circulo $ABCD$. in dato igitur $ABCD$ circulo quadratum $ABCD$ descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. VII. PROBL.

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus $ABCD$. oportet circa $ABCD$ circulum quadratum describere. Ducantur circuli $ABCD$ duæ diametri AC BD ad rectos inter se angulos, & per puncta A , B , C , D ducantur circuli $ABCD$ contingentes a FG GH HK KF .



- Quoniam igitur FG contingit circulum $ABCD$, à centro autem E ad contactum qui est ad A ducitur EA ; erunt b anguli ad A recti. eadem ratione, & anguli ad puncta B , C , D recti sunt. & quoniam angulus AEB rectus est, est autem & rectus EBG ; erit GH ipsi AC parallela c . eadem ratione, & AC parallela est FK . similiter demonstrabimus & utramque ipsarum GF HK ipsi BD parallelam esse. quare & GF est parallela HK . d parallelogramma igitur sunt GK GC AK FB . e 28. primi. BK , ac propterea GF quidem est e æqualis HK , GH , vero ipsi FK . & quoniam AC æqualis est BD ; sed AC quidem utrique ipsarum

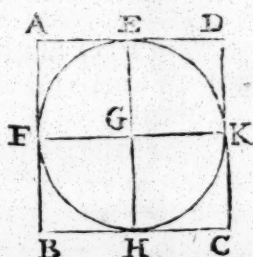
ipsarum $GHFK$ est ^d æqualis; BD vero æqualis utrique $GFHK$, & utraque $GHFK$ utrique $GFHK$ æqualis erit. æquilaterum igitur est $FGHK$ quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim parallelogrammum est $GBEA$, atque est rectus AEB angulus, & ipse AGB rectus erit. similiter demonstrabimus angulos etiam ad puncta $H K F$ rectos esse. rectangulum igitur est quadrilaterum $FGHK$. demonstratum autem est & æquilaterum. ergo quadratum sit necesse est, & descriptum est circa circulum $ABCD$. Circa datum igitur circulum quadratum descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. VIII. PROBL.

In dato quadrato circulum describere.

Sit datum quadratum $ABCD$. oportet in quadrato $ABCD$ circulum describere. Secetur utraque ipsarum $AB AD$ bifariam ^a in punctis F, E . & per E quidem alterutri ipsarum ^a 10. primi.

$ABCD$ parallela ^b ducatur EH : per F vero ducatur FK parallela ^b alterutri $AD BC$. parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum $AK KB AH HD AG GC BG GD$: & latera ipsorum quæ ex opposito, sunt æqualia ^c. & quoniam DA est æqualis AB ; & ipsius quidem AD dimidium est



^b 31. primi.

^c 34. primi.

AE ; ipsius vero AB dimidium AF ; erit AE ipsi AF æqualis. quare & opposita latera æqualia sunt. ergo FG est æqualis GE . similiter demonstrabimus, & utramque ipsarum $GH GK$ utrique $FG GE$ æqualem esse. quatuor igitur $GE GF GH GK$ inter se sunt æquales. itaque centro quidem G , intervallo autem unius ipsarum $GE GF GH GK$ circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas $AB BC CD DA$ continget; propterea quod anguli ad E, F, H, K , recti sunt: si enim circulus secabit rectas lineas $AB BC CD DA$, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet; quod ^d est absurdum. non igitur centro quidem G intervallo autem unius ipsarum $GE GF GH GK$ circulus descriptus rectas lineas $AB BC CD DA$ secabit. quare ipsas necessario continget; atque erit descriptus in quadrato $ABCD$. In dato igitur quadrato circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

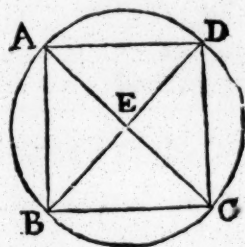
^d 16. tertii.

PROP:

PROP. IX. PROBL.

Circa datum quadratum circulum describere.

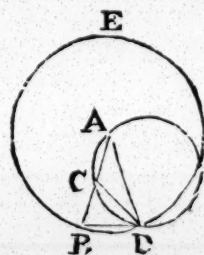
Sit datum quadratum $ABCD$. oportet circa $ABCD$ quadratum circulum describere. Jungantur AC BD , quæ se invicem in puncto E secent. & quoniam DA est æqualis AB , communis autem AC ; duæ DA AC duabus BA AC æquales sunt; & basis DC æqualis basi BC ; erit angulus DAC angulo BAC æqualis a . angulus igitur DAB bifariam sectus est recta linea AC . similiter demonstrabimus unumquemque angulorum ABC BCD CDA rectis lineis AC DB bifariam sectum esse. quoniam igitur angulus DAB angulo ABC est æqualis, atque est anguli quidem DAB dimidium angulus EAB , anguli vero ABC dimidium EBA ; & EAB angulus angulo EBA æqualis erit. quare & latus EA lateri EB est b æquale. similiter demonstrabimus & utramque rectarum linearum EC ED utrique EA EB æqualem esse. ergo quatuor rectæ lineæ EA EB EC ED inter se sunt æquales. centro igitur E , intervallo autem unius ipsarum EA EB EC ED circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit descriptus circa $ABCD$ quadratum. describatur ut $ABCD$. Circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.



PROP. X. PROBL.

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque angulorum qui sunt ad basim, duplum reliqui.

Exponatur recta quædam linea AB , & secetur in puncto, ita ut rectangulum contentum sub AB BC æquale a sit ei, quod ex CA describitur, quadrato: & centro quidem A , intervallo autem AB circulus describatur BDE ; apteturque in BDE circulo recta linea BD æqualis b ipsi AC quæ non est major diametro circuli BDE : & junctis DA DC , circa ADC triangulum c circulus ACD describatur. itaque quoniam rectangulum ABC æquale est quadrato quod fit ex AC ,



AC; æqualis autem est AC ipsi BD; erit sub ABBC rectan-
 lum quadrato ex BD æquale. & quoniam extra circulum
 ACD sumptum est aliquod punctum B, & à puncto B in
 circulum ACD cadunt duæ rectæ lineæ BCA BD, quarum
 altera quidem secatur, altera vero incidit; atque est re-
 ctangulum sub ABBC æquale quadrato ex BD: recta li-
 nea BD circulum ACD continget. quoniam igitur BD con-
 tingit, & à contactu ad D ducta est DC; erit BDC angu-
 lus æqualis ^d ei qui in alterno circuli segmento consti-
 tuitur, videlicet angulo DAC. quod cum angulus BDC æ-
 qualis sit ipsi DAC, communis apponatur CDA; totus igitur
 BDA est æqualis duobus angulis CDA DAC. sed ipsis CDA
 DAC exterior angulus BCD est æqualis. ergo & BDA æ-
 qualis est ipsi BCD. sed BDA angulus est f æqualis angulo
 CBD, quoniam & latus AD lateri AB est æquale. ergo &
 DBA ipsi BCD æqualis erit. tres igitur anguli BDA DBA
 BCD inter se æquales sunt. & quoniam angulus DBC æqua-
 lis est angulo BCD, & latus BD lateri DC est g æquale. sed BD
 ponitur æqualis ipsi CA. ergo & CA est æqualis CD. quare &
 angulus CDA æqualis est angulo DAC. anguli igitur CDA
 DAC simul sumpti ipsius anguli DAC duplices sunt. est autem
 & BCD angulus angulis CDA DAC æqualis; ergo & BCD
 duplex est ipsius DAC. sed BCD est æqualis alterutri ipso-
 rum BDA DBA. quare & uterque BDA DBA ipsius DAB
 est duplex. Isosceles igitur triangulum constitutum est ADB
 habens utrumque eorum angulorum qui sunt ad basim, du-
 plum reliqui. Quod facere oportebat.

e 37. tertii.

d 32. tertii.

e 32. primi.

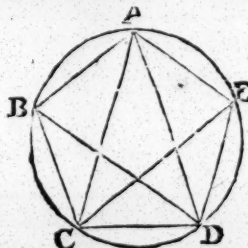
f 5. primi.

g 6. primi.

PROP. XI. PROBL.

*In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangu-
 lum describere.*

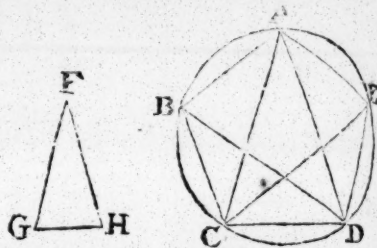
Sit datus circulus ABCDE. oportet in ABCDE circulo
 pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere. Ex-
 ponatur triangulum isosceles
 FGH habens utrumque eo-
 rum qui sunt ad basim GH
 angulorum, duplum ^a anguli
 qui est ad F: & describatur
 in circulo ABCDE triangu-
 lo FGH æquiangulum ^b tri-
 angulum ACD, ita ut angulo
 quidem qui est ad F æqualis sit angulus CAD; utrique
 vero ipsorum qui ad G H, sit æqualis uterque ACD CDA. &
 uterque



a 10. hujus.

b 2. hujus.

uterque igitur $ACD CDA$ anguli CAD est duplus. secetur
 9. primi. uterque ipsorum $ACD CDA$ bifariam e rectis lineis $CE DB$;
 & $AB BC DE EA$ jungantur. quoniam igitur uterque
 ipsorum $ACD CDA$ duplus
 est ipsius CAD , & secti sunt
 bifariam rectis lineis $CE DB$,
 quinque anguli $DAC ACE$
 $ECD CDB BDA$ inter se sunt
 æquales. æquales autem an-
 guli in æqualibus circumfe-
 rentiis insistant d . quinque
 26. tertii. igitur circumferentiæ $AB BC CD DE EA$ æquales sunt in-
 29. tertii. ter se. sed æquales circumferentias e æquales rectæ lineæ
 subtendunt. ergo & quinque rectæ lineæ $AB BC CD DE$
 EA inter se æquales sunt. æquilaterum igitur est $ABCDE$
 pentagonum. dico & æquiangulum esse. quoniam enim cir-
 cumferentia AB æqualis est circumferentiæ DE , communis
 apponatur BCD . tota igitur $ABCD$ circumferentia toti cir-
 cumferentiæ $EDCB$ est æqualis, & in circumferentia qui-
 dem $ABCD$ insitit angulus AED , in circumferentia vero
 $EDCB$ insitit BAE . ergo & BAE angulus est æqualis an-
 gulo AED . eadem ratione & unusquisque angulorum ABC
 $BCD CDE$ unicuique ipsorum $BAE AED$ est æqualis. æ-
 quiangulum igitur est $ABCDE$ pentagonum: ostensum au-
 tem est & æquilaterum esse. Quare in dato circulo penta-
 gonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est. Quod
 facere oportebat.



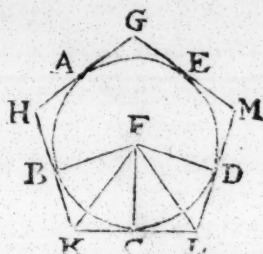
PROP. XII. PROBL.

*Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æ-
 quiangulum describere.*

Sit datus circulus $ABCDE$. oportet circa circulum $ABCDE$
 pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere. In-
 telligantur pentagoni in circulo descripti a angulorum puncta
 esse $ABCDE$, ita ut circumferentiæ $AB BC CD DE EA$ sint
 17. tertii. æquales; & per puncta A, B, C, D, E , ducantur b circulum con-
 tingentes $GH HK KL LM MG$, & sumpto circuli $ABCDE$
 centro F , jungantur $FB FK FC FL FD$. quoniam igitur
 recta linea KL contingit circulum $ABCDE$ in puncto C ,
 & à centro F ad contactum qui est ad C ducta est FC , erit
 18. tertii. FC ad ipsam KL perpendicularis c . rectus igitur est uterque
 angulorum qui sunt ad C . eadem ratione & anguli qui ad
 puncta $B D$ recti sunt. & quoniam rectus angulus est FCK ,
 quadra-

quadratum quod fit ex FK æquale d est quadratis ex FC d 47. primi.
 CK . & ob eandem causam quadratis ex FB BK æqua-

le est ex FK quadratum.
 quadrata igitur ex FC CK
 quadratis ex FB BK æqualia
 sunt, quorum quod ex FC
 ei quod ex FB est æquale.
 ergo reliquum quod ex CK
 reliquo quod ex BK æquale
 erit. æqualis igitur est BK



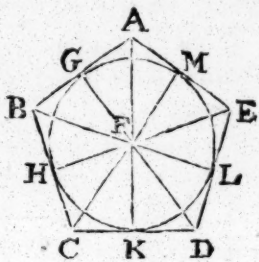
ipsi CK . & quoniam FB est æqualis FC , communis autem
 FK , duæ BF FK duabus CF FK æquales sunt; & basis BK
 est æqualis basi KC ; erit angulus e itaque BFK angulo e 8. primi.
 KFC æqualis, angulus vero BKF angulo KFC . duplus
 igitur est angulus BFC anguli KFC , & angulus BKC du-
 plus ipsius KFC . eadem ratione, & angulus CFD anguli
 CFL est duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF .
 & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CD est æqua-
 lis, & angulus BFC angulo CFD æqualis f erit: atque est f 27. tertii.
 angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero
 DFC duplus ipsius LFC . æqualis igitur est angulus KFC
 angulo CFL . itaque duo triacula sunt FKC FLC , duos an-
 gulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, &
 unum latus uni lateri æquale quod ipsis commune est FC :
 ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt g , g 26. primi.
 & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur
 linea KC est æqualis rectæ CL , & angulus FKC angulo FLC .
 & quoniam KC est æqualis CL , erit KL ipsius KC dupla.
 eadem ratione, & HK ipsius BK dupla ostendetur. rursus
 quoniam BK ostensa est æqualis ipsi KC , atque est KL qui-
 dem dupla KC , HK vero ipsius BK dupla: erit HK ipsi
 KL æqualis. similiter & unaquæque ipsarum GH GM ML
 ostendetur æqualis utrique HK KL . æquilaterum igitur est
 $GHKLM$ pentagonum. dico etiam æquiangulum esse. quo-
 niam enim angulus FKC est æqualis angulo FLC ; & osten-
 sus est angulus HKL duplus ipsius FKC ; ipsius vero FLC
 duplus KLM : erit & HKL angulus angulo KLM æqualis.
 simili ratione ostendetur & unusquisque ipsorum KHG HGM
 GML utrique HKL KLM æqualis. quinque igitur anguli GHK
 HKL KLM LMG MGH inter se æquales sunt. ergo æqui-
 angulum est $GHKLM$ pentagonum. ostensum autem est
 etiam æquilaterum esse: & descriptum est circa $ABCDE$
 circulum. Quod facere oportebat.

PROP.

PROP. XIII. PROBL.

In dato pentagono, quod æquilaterum & æquiangulum sit, circulum describere.

- Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDE. oportet in ABCDE pentagono circulum describere. Secetur uterque angulorum BCD CDE bifariam a rectis lineis CF DF; & à puncto F in quo conveniunt inter se CF DF ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC est æqualis CD, communis autem CF, duæ BC CF, duabus DC CF æquales sunt, & angulus BCF est æqualis angulo DCF. basis igitur BF FD est æqualis, & BFC triangulum æquale triangulo DCF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur; angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. & quoniam angulus CDE angulo CDF est duplus, & angulus quidem CDE angulo ABC æqualis, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit & CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo CBF æqualis. angulus igitur ABC bifariam sectus est recta linea BF. similiter demonstrabitur unumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam sectum esse. à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur perpendiculares FG FH FK FL FM. & quoniam angulus HCF est æqualis angulo KCF; est autem & rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, commune scilicet utrisque FC, quod uni æqualium angulorum subtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK æqualis. similiter ostendetur & unaquæque ipsarum FL FM FG æqualis utrique FH FK. quinque igitur rectæ lineæ FG FH FK FL FM inter se æquales sunt. quare centro F intervallo autem unius ipsarum FG FH FK FL FM, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas AB BC CD DE EA continget; propterea quod anguli ad GHKLM recti sunt. si enim non continget, sed ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet, quod absurdum esse ostensum est. non igitur centro F, &



intervallo uno ipsorum punctorum $GHKLM$ circulus descriptus rectas lineas $ABBCDDEEA$ secabit. quare ipsas contingat necesse est. describatur ut $GHKLM$. In dato igitur pentagono quod est æquilaterum, & æquiangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

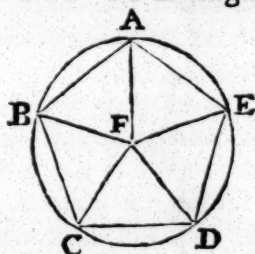
Cor. Si duo anguli proximi figuræ æquilateræ & æquiangulæ bisecentur, & à puncto in quo coeunt lineæ angulum bisecantes, ducantur rectæ lineæ ad reliquos figuræ angulos, omnes anguli figuræ erunt bisecti.

PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum quod æquilaterum & æquiangulum sit, circulum describere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum $ABCDE$. oportet circa pentagonum $ABCDE$ circulum describere. Secetur uterque ipsorum BCD CDE angulorum bifariam ^a rectis lineis CF FD :

& à puncto F in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta BAE ducantur $FBFAFE$. & unusquisque angulorum CBA BAE AED rectis lineis BF FA FE bifariam ^b sectus erit. & quoniam angulus BCD angulo



^a 9 primi.

CDE est æqualis; atque est anguli quidem BCD dimidium angulus FCD , anguli vero CDE dimidium CDF ; erit & FCD angulus æqualis angulo FDC , quare & latus CF lateri FD est æquale ^c. similiter demonstrabitur & unaquæque ipsarum $FBFAFE$ æqualis unicuique $FCFD$. quinque igitur rectæ lineæ $FAFBFCFD FE$ inter se æquales sunt. ergo centro F , & intervallo unius ipsarum $FAFBFCFD FE$, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta: atque erit descriptus circa pentagonum $ABCDE$ quod æquilaterum est & æquiangulum. describatur, & sit $ABCDE$. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

^b Cor præcedente.

^c 6. primi.

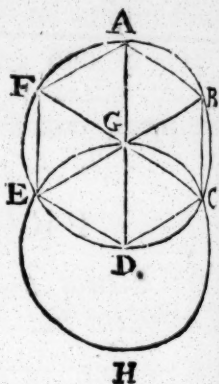
PROP. XV. PROBL.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit datus circulus $ABCDEF$. oportet in circuli $ABCDEF$ hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Ducatur

Ducatur circuli $ABCDEF$ diameter AD , sumaturque centrum circuli G ; & centro quidem D , intervallo autem DG circulus describatur $EGCH$, junctæ EG CG ad puncta B F producantur, & jungantur AB BC CD DE EF FA . dico hexagonum $ABCDEF$ æquilaterum & æquiangulum esse. Quoniam enim G punctum centrum est $ABCDEF$ circuli, erit GE ipsi GD æqualis. rursus quoniam D centrum est circuli $EGCH$, erit DE æqualis DG : sed GE ipsi GD æqualis ostensa est. ergo GE ipsi ED est æqualis. æquilaterum igitur est EGD triangulum, ideoque tres ipsius anguli EGD GDE DEG inter se æquales ^a sunt; & sunt trianguli tres anguli æqua-



^a Cor. 5. primi.

^b 32. primi.

^c 13. primi.

^d 15. primi.

^e 26. tertii.

^f 29. tertii.

^g 27. tertii.

les ^b duobus rectis. angulus igitur EGD duorum rectorum tertia pars est. similiter ostendetur & DGC duorum rectorum tertia pars. & quoniam recta linea CG super rectam EB insistens, angulos qui deinceps sunt EGC GCB duobus rectis æquales ^c efficit; erit & reliquus GCB tertia pars duorum rectorum. anguli igitur EGD DGC GCB inter se sunt æquales. & qui ipsis ad verticem sunt anguli BGA AGF FGE æquales ^d sunt angulis EGD DGC GCB . quare sex anguli EGD DGC GCB BGA AGF FGE inter se æquales sunt. sed æquales anguli æqualibus circumferentiis insistant ^e. sex igitur circumferentiæ AF BC CD DE EF FA inter se sunt æquales: æquales autem circumferentias æquales ^f rectæ lineæ subtendunt. ergo & sex rectæ lineæ inter se æquales sint necesse est. ac propterea æquilaterum est $ABCDEF$ hexagonum. dico & æquiangulum esse. quoniam enim circumferentia AF circumferentiæ ED est æqualis, communis apponatur circumferentia $ABCD$: tota igitur $FABCD$ circumferentia æqualis est toti circumferentiæ $EDCBA$. & circumferentiæ quidem $FABCD$ angulus FED insitit, circumferentiæ vero $EDCBA$ insitit angulus AFE . angulus igitur AFE angulo DEF est ^g æqualis. similiter ostenduntur & reliqui anguli hexagoni $ABCDEF$ figillatim æquales utrique ipsorum AFE FED . ergo æquiangulum est $ABCDEF$ hexagonum. ostensum autem est & æquilaterum esse: & descriptum est circulo $ABCDEF$. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

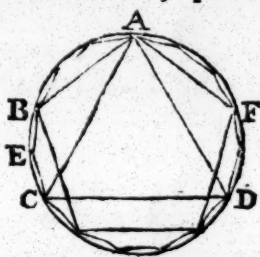
Ex hoc manifestum est hexagoni latus, ei quæ est ex centro circuli æquale esse. & si per puncta $ABCDEF$ contingentes circumulum ducamus, circa circumulum describetur hexa-

hexagonum æquilaterum & æquiangulum, consequenter iis quæ in pentagono dicta sunt : & præterea similiter in dato hexagono circulum inscribemus, & circumscribemus. Quod facere oportebat.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus $ABCD$. oportet in $ABCD$ circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum describere. Sit AC latus trianguli ^a quidem æquilateri in ipso circulo $ABCD$ *descripti, pentagoni ^b vero æquilateri latus AB , quarum igitur partium est $ABCDF$ circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABC , tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia vero AB , quæ quinta est circuli, erit trium. ergo reliqua BC est duarum. secetur BC bifariam in puncto E . quare utraque ipsarum $BE EC$ circumferentiarum quintadecima pars est $ABCD$ circuli. si igitur jungentes $BE EC$, æquales ipsis in continuum rectas lineas in circulo $d ABCD$ aptemus, in ipso quindecagonum æquilaterum & æquiangulum descriptum erit. Quod facere oportebat.



Similiter autem iis quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli divisiones, contingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. & insuper dato quindecagono æquilatero & æquiangolo circulum inscribemus, & circumscribemus.

* Facillimè describitur latus AC per prop. præced. si enim duo latera hexagoni circulo inscribantur ab A versus C , horum opposita extrema incident in puncta A, C extrema lateris trianguli quæsiti.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

I.

Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II.

Multiplex est major minoris, quando majorem minor metitur.

III.

Proportio seu ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis, secundum quantitatem, mutua quædam habitudo.

IV.

Proportionem habere inter se magnitudines dicantur, quæ multiplicatæ se invicem superare possunt.

V.

In eadem proportionem magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, secundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unâ superant, vel unâ æquales sunt, vel unâ deficiunt, inter se comparatæ.

VI.

Magnitudines quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

Ea magnitudinum Proportionalium definitio vulgo apud Interpretes traditur, quam Euclides in Elemento septimo, pro numeris solum posuit. scil.

Magnitudines dicuntur esse proportionales, quando Prima Secundæ & Tertia Quartæ æquemultiplex est, vel eadem partes.

Sed hæc definitio Numeris & quantitibus commensurabilibus tantum competit; Adeoque cum Universalis non sit, recte ab Euclide in hoc elemento omnium Proportionalium proprietates tradituro rejicitur; & alia generalis substituitur cuius magnitudinum speciei congruens. Interim multum laborant Interpretes ut Definitionem hanc loci ab Euclide expositam, ex vulgo recepta numerorum Proportionalium definitione demonstrent; sed facilius multo hæc ab illa fluit quam illa ab hac. Quod sic ostendetur.

Primo Sint ABCD quatuor magnitudines quæ sunt in eadem ratione; prout in definitione 5^{ta} magnitudines in eadem ratione esse exponuntur. Sitque Prima multiplex secundæ, dico & tertiam eandem esse multiplicem Quartæ. Sit ex gr. A æqualis 5 B. erit C æqualis 5 D. Capiatur numerus quilibet v. gr. 2. per quem multiplicetur 5 & productus sit 10: Et magnitudinum A & C Primæ & Tertiæ capiantur æque multiplices

$$\begin{array}{cccc} A: & B:: & C: & D \\ 2A & 10B & 2C & 10D \end{array}$$
 2A 2C. Item magnitudinum B & D Secundæ & Quartæ capiantur æque multiplices 10B, & 10D. Et per defn. quintam, si 2A sint æquales 10B, erint 2C. æquales 10D. at quia A est quintuplex ex hypothesi ipsius B, erunt 2A æquales 10B. unde & 2C æquales 10D. & C æqualis 5D, hoc est erit C quintuplex ipsius D q. e. d.

Secundo. Si A sit pars quævis ipsius B , erit C eadem pars ipsius D . Nam quia est A ad B . sicut C ad D . cumque A sit pars quædam ipsius B , erit B , multiplex ipsius A ; adeoque per priorem casum D erit eadem multiplex ipsius C & proinde C eadem pars erit magnitudinis D ac est A ipsius B .
q. e. d.

Tertio. Sit A æqualis quotlibet quarumvis partium ipsius B . dico & C esse æqualem totidem similium partium ipsius D . v. gr. A in se contineat quartam partem ipsius B quinquies; hoc est, sit A æqualis $\frac{1}{4}B$, dico & C esse æqualem $\frac{1}{4}D$. Nam quoniam A est æqualis $\frac{1}{4}B$; multiplicando utramque per 4, erunt $2A$ æquales $5B$. Capiantur itaque æque multiplices Primæ & Tertiæ scil. $4A$ & $4C$; item alie æque multiplices Secundæ & Quartæ scil. $5B$ & $5D$. & per definitionem, si $4A$ sint æquales $5B$, erunt $4C$ æquales $5D$. at ostensum est $4A$ æquales esse $5B$. adeoque & $4C$ æquales erunt $5D$, & C æqualis $\frac{1}{4}D$.
q. e. d.

Universaliter sit A æqualis $\frac{n}{m}B$, erit C æqualis $\frac{n}{m}D$. multiplicentur enim A & C per m . Et B & D per n . Et quoniam est A æqualis $\frac{n}{m}B$, erit mA æqualis nB ; unde per def. 5 tam erit mC æqualis nD ; & C æqualis $\frac{n}{m}D$. q. e. d.

VII.

Quando autem æque multiplicium, multiplex quidem primæ superaverit multiplicem secundæ, multiplex vero tertiæ non superaverit multiplicem quartæ, tunc prima ad secundam majorem proportionem habere dicitur quam tertia ad quartam.

VIII.

Analogia est proportionum similitudo.

IX.

Analogia vero in tribus terminis ad minimum consistit.

X.

Quando tres magnitudines proportionales sunt, prima ad tertiam, duplicatam proportionem habere dicitur ejus quam habet ad secundam.

XI.

Quando autem quatuor magnitudines sunt proportionales, prima ad quartam, triplicatam habere proportionem dicitur ejus quam habet ad secundam, & semper deinceps, una amplius, quoad analogia processerit.

XII.

Homologæ, vel similis rationis magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

XIII.

Alterna seu permutata ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

XIV.

Inversa ratio est sumptio consequentis ut antecedentis, ad antecedentem, ut ad consequentem.

XV.

Compositio rationis est sumptio antecedentis unà cum consequente, tanquam unius, ad ipsam consequentem.

XVI.

Divisio rationis est sumptio excessus quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

XVII.

Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum quo antecedens ipsam consequentem superat.

XVIII.

Ex æquo five ex æqualitate ratio est, cum plures magnitudines extiterint, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem proportionem, fueritque ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, est sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

XIX.

Ordinata proportio est, quando fuerit ut antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero proportio est, quando tribus existentibus magnitudinibus, & aliis ipsis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis alia quampiam ad antecedentem.

A X I O M A T A.

I.

Ejusdem five æqualium æque multiplices inter se æquales sunt.

II.

Quarum eadem æque multiplex est, vel quarum æquales sunt æque multiplices, & ipsæ inter se sunt æquales.

PROPOSITIO. I. THEOREMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines $ABCD$, quotcunque magnitudinem $E F$, æqualium numero, singulæ singularum æque mul-

multiplices. dico quotuplex est AB ipsius E , totuplices esse & AB CD simul ipsarum E F simul. Quoniam enim AB æque multiplex est ipsius E , ac CD ipsius F ; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi E , tot erunt & in CD æquales ipsi F . dividatur AB quidem in partes ipsi E æquales, quæ sint AG GB ; & CD dividatur in partes æquales ipsi F , videlicet CH HD . erit igitur multitudo partium CH HD æqualis multitudini ipsarum AG GB . & quoniam AG est æqualis E , & CH æqualis F ; erunt & AG CH æquales ^a ipsis E F . eadem ratione quoniam GB est æqualis E , & HD ipsi F ; erunt GB HD æquales ^a ipsis E F . quot sunt itaque in AB æquales ipsi E , tot sunt & in AB CD æquales ipsis E F . ergo quotuplex est AB ipsius E , totuplices erunt & AB CD simul ipsarum E F simul. Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium. Quod demonstrare oportebat

^a Axiom. primi.

PROP. II. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex ac sexta quartæ; erit etiam composita prima cum quinta secundæ æque multiplex ac tertia cum sexta quartæ.

Sit prima AB secundæ C æque multiplex, ac tertia DE quartæ F . sit autem & quinta BG secundæ C æque multiplex, ac sexta EH quartæ F . dico & compositam primam cum quinta scil. AG secundæ C æque multiplicem esse, ac tertiam cum sexta sc. DH quartæ F . Quoniam enim AB æque multiplex est C , ac DE ipsius F ; quot magnitudines sunt in AB æquales C , tot erunt & in DE æquales F . eadem ratione & quot sunt in BG æquales C , tot & in EH erunt æquales F . quot igitur sunt in tota AG æquales C , tot erunt & in tota DH æquales F . ergo quotuplex est AG ipsius C , totuplex est &

DH

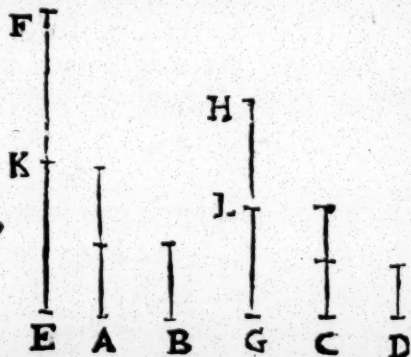
DH ipsius F. & composita igitur prima cum quinta AC secundæ C æque multiplex erit, ac tertia cum sexta DH quartæ F: quare si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, ac sexta quartæ; erit composita quoque prima cum quinta æque multiplex secundæ, ac tertia cum sexta quartæ. Quod oportebat demonstrare.

PROP. III. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit &, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Sit prima A secundæ B æque multiplex ac tertia C quartæ D: & sumantur ipsarum A C æque multiplices E F G H. dico E F æque multiplicem esse ipsius B, ac G H ipsius D. Quoniam enim E F æque multiplex est ipsius A, & G H ipsius C; quot magnitudines sunt in E F æquales A, tot erunt & in G H æquales C. dividatur E F quidem in magnitudines ipsi A æquales E K K F; G H vero dividatur in magnitudines æquales C, videlicet G L L H. erit igitur ipsarum E K K F multitudo æqualis multitudini ipsarum G L L H. & quoniam æque multiplex est A ipsius B ac C ipsius D; æqualis autem E K ipsi A, & G L ipsi C; erit E K æque multiplex ipsius B, ac G L ipsius D. eadem ratione æque multiplex erit K F ipsius B, ac L H ipsius D. quoniam igitur prima E K secundæ B æque multiplex est, ac tertia G L quartæ D; est autem & quinta K F secundæ B æque multiplex ac sexta L H quartæ D: erit & composita prima cum quinta E F, secundæ B æque multiplex, ac tertia cum sexta G H, quartæ D. Si igitur prima secundæ æque fuerit multiplex ac tertia quartæ, sumantur autem primæ & tertiæ æque multiplices: erit &, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ. Quod ostendisse oportuit.

2. hujus.



PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habet proportionem quam tertia ad quartam: & æque multiplices primæ & tertiæ ad æque multiplices secundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ.

Prima A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: & sumantur ipsarum quidem

A C utcunque æque multipli-

ces E F; ipsarum vero B D aliæ utcunque æque multiplices G H.

dico E ad G ita esse ut F ad H. Sumantur rursus ipsarum E F æ-

que multiplices K L, & ipsarum G H æque multiplices M N. quoniam igitur E æque multiplex est

ipsius A, atque F ipsius C; sumuntur autem ipsarum E F æque multiplices K L: erit K æque multiplex

A ipsius A, atque L ipsius C. eadem ratione M æque multiplex erit ipsius B, atque N ipsius

D. & quoniam est ut A ad B ita C ad D. sumptæ autem sunt ipsarum A C æque multiplices K L;

& ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices M N: si K superat M, superabit & L ipsam N;

& si æqualis æqualis; & si minor minor. suntque K L quidem ipsarum E F æque multiplices; M N vero ipsarum G H aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur E ad

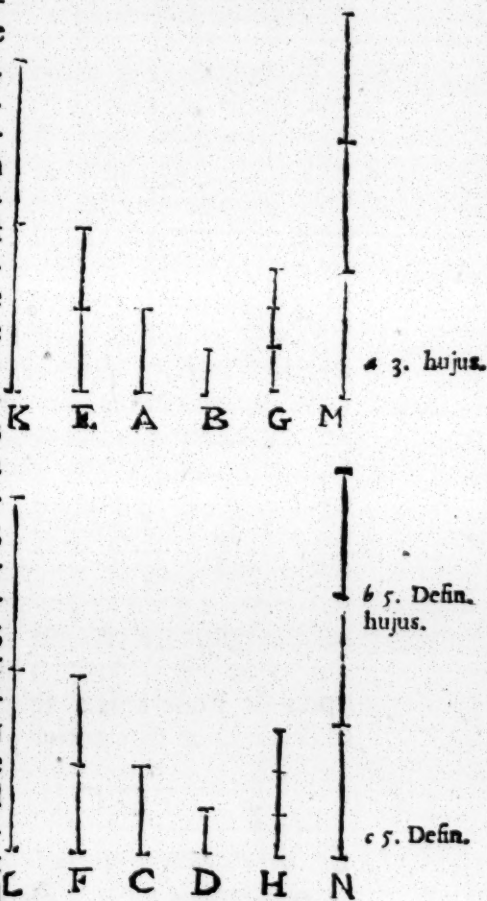
G ita C erit F ad H. quare si prima ad secundam eandem habeat

proportionem quam tertia ad

quartam; & æque multiplices primæ ac tertiæ ad æque multiplices secundæ ac quartæ, juxta quamvis multiplicatio-

nem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ. Quod demonstrare oportebat.

Quoniam igitur demonstratum est si K superat M, & L ipsam N superare; & si æqualis, æqualem esse, & si minor, minorem:



¶ 5. Defin.
hujus.

minorem; constat etiam si M superarat K , & N superare ipsam L ; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem; ac propterea ut G ad E ita esse H ad F .

Cor. Ex hoc manifestum est, si quatuor magnitudines sint proportionales, & inverse proportionales esse.

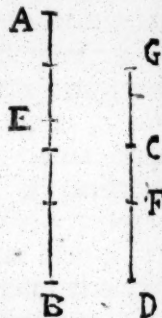
PROP. V. THEOR.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablata; & reliqua reliquæ æque multiplex erit ac tota totius.

¶ 1. hujus.

¶ 2. Axiom.
hujus.

Magnitudo AB magnitudinis CD æque multiplex sit atque ablata AE ablata CF . dico & reliquam EB reliquæ FD æque multiplicem esse atque totam AB totius CD ; Quotuplex enim est AE ipsius CF , totuplex fiat & EB ipsius CG . & quoniam AE æque multiplex est CF atque EB ipsius CG ; erit AE æque multiplex CF , ac AB ipsius GF ; ponitur autem æque multiplex AE ipsius CF , ac AB ipsius CD . æque multiplex igitur est AB utriusque GF CD ; ac propterea GF ipsi CD est æqualis. communis auferatur CF . reliqua igitur GC æqualis est reliquæ DF . itaque quoniam AE æque multiplex est CF , ac EB ipsius CG , estque CG æqualis DF ; erit AE æque multiplex CF , ac EB ipsius FD . æque multiplex autem ponitur AE ipsius CF , ac AB ipsius CD . ergo EB est æque multiplex FD , ac AB ipsius CD . & reliqua igitur EB reliquæ FD æque multiplex est, atque tota AB totius CD . Quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablata: & reliqua reliquæ æque erit multiplex, ac tota totius. Quod oportebat demonstrare.

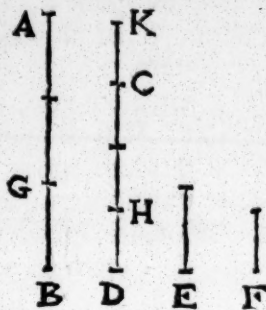


PROP. VI. THEOR.

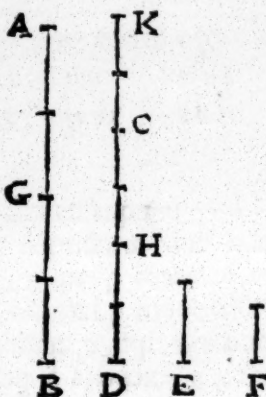
Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablata quædam sint earundem æque multiplices: erunt & reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices:

Duæ magnitudines AB CD duarum magnitudinum E F æque multiplices sint, & ablata AG CH earundem sint æque multiplices. dico & reliquas GB HD vel ipsis E F æquales esse,

esse, vel ipsarum æque multiplices. Sit enim primo GB æqualis E . dico & HD ipsi F esse æqualem. ponatur ipsi F æqualis CK . & quoniam AG æque multiplex est E ac CH ipsius F ; estque GB quidem æqualis E ; CK vero æqualis F : erit AB æque multiplex E , ac KH ipsius F . æque autem multiplex ponitur AB ipsius E , ac CD ipsius F . ergo KH æque multiplex est F , ac CD ipsius F . quoniam igitur utraque ipsarum KH CD est æque multiplex F , erit KH æqualis CD . communis auferatur CH . ergo reliqua KC reliquæ HD est æqualis. sed KC est æqualis F . & HD igitur ipsi F est æqualis; ideoque GB ipsi E , & HD ipsi F æqualis erit. similiter demonstrabimus si GB multiplex fuerit ipsius E ; & HD ipsius F æque multiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices: erunt & reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices. Quod demonstrare oportebat.



2. hujus.

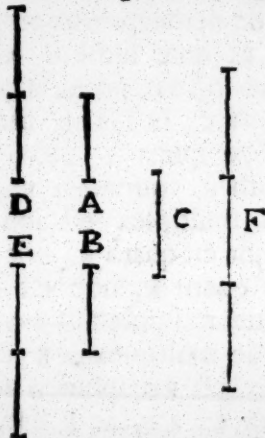


1. Axiom. hujus.

PROP. VII. THEOR.

Æquales ad eandem eandem habent proportionem, & eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines A B , alia autem quævis magnitudo C . dico utramque ipsarum A B ad C eandem proportionem habere: & C ad utramque A B similiter eandem habere proportionem. Suman- tur ipsarum A B æque multiplices D E , & ipsius C alia utcunque multiplex F . quoniam igitur æque multiplex est D ipsius A , ac E ipsius B , estque A ipsi B æqualis; erit & D æqualis E ; alia autem utcunque est F . ergo si D superat F , & E ipsam F superavit, & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt D E qui-



1. Axiom. hujus.

dem

6 5. Defin.
hujus.

dem ipsarum $A B$ æque multiplices: F vero alia utcumque multiplex ipsius C . erit igitur b ut A ad C . ita B ad C . dico insuper C ad utramque ipsarum $A B$ eandem habere proportionem. iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E æqualem esse, si igitur F superat D , ipsam quoque E superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. atque est F quidem ipsius C multiplex; $D E$ vero aliæ utcumque æque multiplices ipsarum $A B$. ergo a ut C ad A , ita erit C ad B . Æquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales. Quod ostendere oportebat.

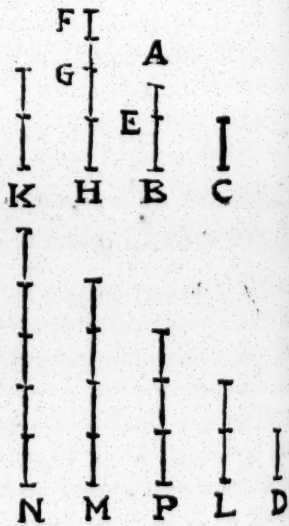
PROP. VIII. THEOR.

Inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem habet proportionem, quam minor. & eadem ad minorem, majorem proportionem habet, quam ad majorem.

a 4. Def.
hujus.

Sint inæquales magnitudines, $A B, C$, & sit $A B$ major. sit alia vero utcumque D . dico $A B$ ad D majorem habere proportionem quam C ad D . & D ad C majorem habere proportionem quam ad $A B$. Quoniam $A B$ major est quam C ,

ponatur ipsi C æqualis $B E$, hoc est $A B$ excedat C per $A E$. itaque $A E$ aliquoties multiplicata major a erit quam D . multiplicetur $A E$ quoad fiat major quam D . sitque ipsius multiplex $F G$ ipsa D major. quotuplex autem est $F G$ ipsius $A E$, totuplex fiat $G H$ ipsius $E B$, & K ipsius C . sumatur etiam ipsius D dupla quidem L , tripla P , & sic deinceps una amplius, quoad ea quæ sumitur multiplex ipsius D , fiat prima quæ sit major quam K ; sit illa N . sitque M multiplex ipsius D proxime minor quam N . quoniam itaque N prima multiplex est ipsius D quæ major est quam K ; erit M non major quam K , hoc est K non erit minor quam M . & cum æque multiplex sit $F G$ ipsius $A E$ ac $G H$ ipsius $E B$, erit $F G$ æque multiplex $A E$ ac $F H$ ipsius $A B$. æque autem multiplex est $F G$ ipsius $A E$ ac K ipsius C , ergo $F H$ æque multiplex est $A B$, ac K ipsius C ; hoc est $F H$ K ipsarum $A B$ & C sunt



b 1. hujus.

sunt æque multiplices. rursus quoniam GH æque multiplex est ipsius EB ac K ipsius C , estque EB æqualis C erit & GH ipsi K æqualis C . sed K non minor est quam M . non igitur GH minor erit quam M , sed est FG major quam D , ergo tota FH major erit quam M & D . sed M & D simul sunt æquales ipsi N , quia M est multiplex ipsius D ipsi F proxime minor, quare FH major erit quam N . unde cum FH superat N , K vero ipsam N non superat, & sunt FH & K æque multiplices ipsarum AB & C , & est N ipsius D alia multiplex, ergo AB ad D majorem rationem habebit quam C ad D . Dico præterea & D ad C majorem habere proportionem, quam D ad AB . iisdem enim constructis similiter ostendemus N superare K , ipsam vero FH non superare. atque est N multiplex ipsius D , & FH K aliæ utcumque ipsarum ABC æque multiplices. ergo D ad C majorem proportionem habet, quam D ad AB . Inæqualium igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet proportionem, quam minor. & eadem ad minorem, majorem proportionem habet, quam ad majorem. Quod ostendere oportebat.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eandem proportionem habent ad eandem, inter se sunt æquales; & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipsæ etiam inter se sunt æquales.

Habeat enim utraque ipsarum AB ad C eandem proportionem. dico A ipsi B æqualem esse. nam si non esset æqualis, non haberet utraque ipsarum AB ad eandem, eandem proportionem. habet autem æqualis igitur est A ipsi B . Habeat rursus C ad utramque ipsarum AB eandem proportionem. dico A æqualem esse ipsi B . nisi enim ita sit, non habebit C ad utramque AB eandem proportionem. habet autem ergo A ipsi B necessario est æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter se sunt: & ad quas eandem, eandem habet proportionem, ipsæ inter se sunt æquales. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

PROP. X. THEOR.

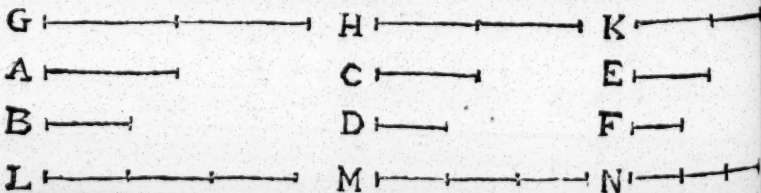
Magnitudinum proportionem habentium ad eandem, quæ majorem proportionem habet, illa major est; ad quam vero eadem majorem habet proportionem, illa minor est.

Habeat enim A ad C majorem proportionem, quam B ad C. dico A quam B majorem esse. si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. æqualis autem non est A ipsi B utraque enim ipsarum A B ad C eandem haberet ^a proportionem. atqui eandem non habet. non est igitur A ipsi B æqualis. sed neque minor est quam B, haberet enim A ad C minorem proportionem, quam B. atqui non habet minorem. non igitur A minor est, quam B. ostensum autem est neque esse æqualem. ergo A quam B major erit. Habeat rursus C ad B majorem proportionem quam C ad A. dico B minorem esse quam A. si enim non est minor, vel æqualis est, vel major. æqualis utique non est A ipsi A, etenim C ad utramque ipsarum A B eandem proportionem ^a haberet. non habet autem. ergo A ipsi B non est æqualis. sed neque major est B quam A, haberet enim C ad B minorem ^b proportionem quam ad A. atqui non habet. non est igitur B major quam A. ostensum autem est neque æqualem esse. ergo B minor erit quam A. Ad eandem igitur proportionem habentium, quæ majorem proportionem habet, illa major est; & ad quam eadem majorem habet proportionem, illa minor est. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XI. THEOR.

Quæ eidem eadem sunt proportionēs, & inter se eadem sunt.

Sint enim ut A ad B ita C ad D: ut autem C ad D ita E ad F. dico ut A ad B, ita esse E ad F. sumantur enim ipsarum



rum quidem A C E æque multiplices G H K; ipsarum vero B D F aliaæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igitur

tur est ut A ad B, ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiplices G H, & ipsarum B D aliæ utcumque æque multiplices L M; si ^a G superat L, & H ipsam M superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. rursus quoniam est ut C ad D, ita E ad F, & sumptæ sunt ipsarum C E æque multiplices H K, ipsarum vero D F aliæ utcumque æque multiplices M N; si ^a H superat M, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed si H superat M, & G superabit L; & si æqualis, æqualis; & si minor minor; quare si G superat L, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt G K quidem ipsarum A E æque multiplices; L N vero ipsarum B F aliæ utcumque æque multiplices. ergo ^a ut A ad B, ita erit E ad F. Quæ igitur eidem eadem sunt proportionales, & inter se eadem sunt. Quod ostendisse oportuit.

^a 5. Def. hujus.

PROP. XII. THEOR.

Si quotcumque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes.

Sint quotcumque magnitudines proportionales A B C D E F, & ut A ad B, ita sit C ad D, & E ad F. dico ut A ad B, ita esse A C E ad B D F. sumantur enim ipsarum A C E æ-



que multiplices G H K, & ipsarum B D F aliæ utcumque æque multiplices L M N. Quoniam igitur ut A ad B, ita est C ad D, & E ad F, & sumptæ sunt ipsarum quidem A C E æque multiplices G H K, ipsarum vero B D F aliæ utcumque æque multiplices L M N; si ^a G superat L, & H ipsam M superabit, & K ipsam N; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. quare & si G superat L, superabunt & G H K ipsas L M N; & si æqualis, æquales; & si minor, minores. suntque G, & G H K ipsarum A, & A C E æque multiplices, quoniam si fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices ^b erunt & omnes omnium. Et eadem ratione L & L M N ipsarum B, & B D F sunt æque multiplices. est igitur ^a ut A ad B, ita

^a 5. Def. hujus.

^b 1. hujus.

A C E

A C E ad B D F. Quare si quocunque magnitudines proportionales fuerint, ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam maiorem proportionem habeat quam quinta ad sextam: & prima ad secundam maiorem habebit proportionem quam quinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D maiorem habeat proportionem quam quinta E ad sextam F. dico & primam A ad secundam B maiorem proportionem



habere, quam quintam E ad sextam F. Quoniam enim C ad D maiorem proportionem habet quam E ad F, sunt quædam ipsarum C E æque multiples, & ipsarum D F aliæ utcunque æque multiples; ut multiplex ^a quidem C superet multiplicem D; multiplex vero E non superet multiplicem F. sumantur. & sint ipsarum C E æque multiples G H, & ipsarum D F aliæ utcunque æque multiples K L, ita ut G quidem superet K: H vero ipsam L non superet: & quotuplex est G ipsius C, totuplex sit & M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totuplex sit & N ipsius B. & quoniam est ut A ad B ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiples M G, & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiples N K: si ^b M superat N, & G ipsam K superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed G superat K. ergo & M ipsam N superabit. H vero non superat L. suntque M H ipsarum A E æque multiples, & N L ipsarum B F aliæ utcunque æque multiples. ergo A ad B maiorem proportionem habebit ^a quàm E ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quàm tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem proportionem habeat quam quinta ad sextam: & prima ad secundam maiorem habebit proportionem quam quinta ad sextam. Quod ostendere oportebat.

^a 7. Def. hujus.

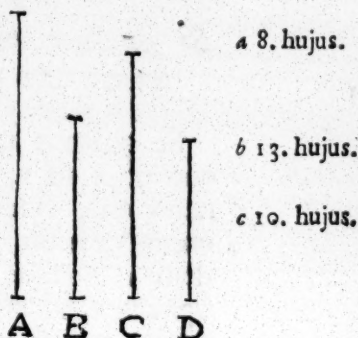
^b 5. Def. hujus.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia: & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

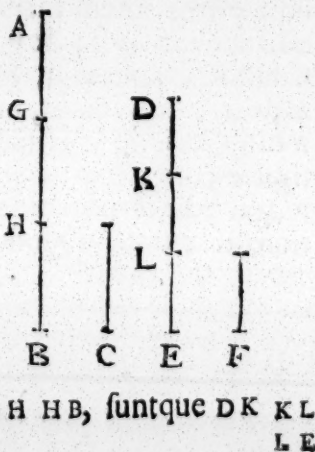
Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: major autem sit A quàm C. dico & B quam D majorem esse. Quoniam enim A major est quam C, & alia est utcunque magnitudo B, habebit ^a A ad B majorem proportionem quàm C ad B; sed ut A ad B ita C ad D. ergo & C ad D majorem habebit ^b proportionem quàm C ad B. ad quam vero eadem majorem proportionem habet, illa minor ^c est. quare D est minor quàm B, ac propterea B quam D major erit. similiter demonstrabimus & si A æqualis sit ipsi C, & B ipsi D esse æqualem; & si A sit minor quam C, & B quàm D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quàm tertia, & secunda quàm quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XV. THEOR.

Partes inter se comparatæ eandem habent proportionem quam habent earum æque multiplices.

Sit enim AB æque multiplex C, ac DE ipse F. dico ut C ad F, ita esse AB ad DE. Quoniam enim æque multiplex est AB ipsius C, ac DE ipse F; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi C, totidem erunt & in DE æquales F. dividatur AB in magnitudines ipsi C æquales, quæ sint AG GH HB; & DE dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in DK KL LE; erit igitur ipsarum AG GH HB multitudo æqualis multitudini DK KL LE. & quoniam æquales sunt AB GH HB, suntque DK KL LE.



^a 7. hujus. LE inter se æquales; ut AG ad DK , ita ^a erit GH ad KL , &
^b 12. hujus. HB ad LE . atque erit ^b ut una antecedentium ad unam
 consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conse-
 quentes: est igitur ut AG ad DK , ita AB ad DE . sed AG
 ipsi c est æqualis, & DK ipsi F . ergo ut c ad F , ita erit AB
 ad DE . Partes igitur inter se comparatæ eandem habent
 proportionem quam habent earum æque multiplices. Quod
 ostendendum fuit.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt.

Si quatuor magnitudines proportionales $A B C D$, sit-
 que ut A ad B , ita C ad D . dico & permutatas proportio-
 nales esse, videlicet ut A ad C , ita esse B ad D . Sumantur
 enim ipsarum qui- E ————— G —————
 dem $A B$ æque mul- A ————— C —————
 tiplices $E F$, ipsarum B ————— D —————
 vero $C D$ aliæ utcun- F ————— H —————
 que æque multipli-
 ces $G H$. & quoniam

^a 15. hujus. æque multiplex est E ipsius A , ac F ipsius B : partes autem
 inter se comparatæ eandem habent ^a proportionem quam
 habent earum æque multiplices; erit ut A ad B ita E ad F . ut
^b 11. hujus. autem A ad B ita C ad D . ergo & ut C ad D ita ^b E ad F .
 rursus quoniam $G H$ sunt ipsarum $C D$ æque multiplices,
 partes autem inter se comparatæ eandem habent proportio-
 nem, quam habent earum æque multiplices; erit ^a ut c ad d
 ita g ad h . sed ut c ad d ita e ad f . ergo ^b & ut e ad f
 ita g ad h . quod si quatuor magnitudines proportionales
^c 14. hujus. sint, prima autem major sit quàm tertia; ^c & secunda quam
 quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.
 si igitur E superat G , & F ipsam H superabit; & si æqualis,
 æqualis; & si minor, minor; suntque $E F$ ipsarum $A B$ æque
 multiplices, & $C H$ ipsarum $C D$ aliæ utcunque æque mul-
^d 5. Def. tiplices, ergo ^d ut A ad C ita erit B ad D . Si igitur quatuor
 magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ propor-
 tionales erunt. Quod ostendere oportebat.

PROP. XVII. THEOR.

Si composita magnitudines sint proportionales, & divisae proportionales erunt.

Sint compositae magnitudines proportionales $AB BE CD$ DF . hoc est ut AB ad BE , ita sit CD ad DF . dico etiam divisas proportionales esse, videlicet ut AE ad EB ita esse CF ad FD . sumantur enim ipsarum quidem $AE EB CF FD$

æque multiples $GH HK LM$ MN , ipsarum vero $EB FD$ aliae utcunque æque multiples $KX NP$. Quoniam æque multiplex est GH ipsius AE , ac HK ipsius EB ; erit a GH ipsius AE æque multiplex, ac GK ipsius AB . æque autem multiplex est GH ipsius AE , ac LM ipsius CF . ergo GK æque multiplex est AB , ac LM ipsius CF . rursus quoniam æque multiplex est LM ipsius CF , ac MN ipsius FD ; erit a LM æque mul-



a 1. hujus.

tiplex CF , ac LN ipsius CD . sed æque multiplex erat LM ipsius CF , ac GK ipsius AB . æque igitur multiplex est GK ipsius AB , ac LN ipsius CD . quare $GK LN$ ipsarum $AB CD$ æque multiplex erunt. rursus quoniam æque multiplex est HK ipsius EB , ac MN ipsius FD : est autem & KX ipsius EB æque multiplex, ac NP ipsius FD ; & composita HX ipsius EB æque multiplex est b ac MP ipsius FD . quare cum sit b ut AB ad BE , ita CD ad DF ; & sumptæ sint ipsarum quidem $AB CD$ æque multiples $GK LN$, ipsarum vero $EB FD$ aliae utcunque æque multiples $HX MP$: si c GK superat HX , & LN superat MP ; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. superet igitur GK ipsam HX , communique ablata HK , & GH ipsam KX superabit. sed si GK superat HX , & LN superat MP : itaque superat LN ipsam MP : communique MN ablata, & LM superabit NP . quare si GH superat KX , & LM ipsam NP superabit. similiter demonstrabimus & si GH sit æqualis KX , & LM ipsi NP esse æqualem; & si minor, minorem. sunt autem $GH LM$ ipsarum $AE CF$ æque multiples, & ipsarum $EB FD$ aliae utcunque æque multiples $KX NP$. ergo c ut AE ad EB ita erit CF ad FD . Si igitur compositae magnitudines sint proportionales, & divisae proportionales erunt. Quod demonstrare oportebat.

b 2. hujus.

c 5. Def. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

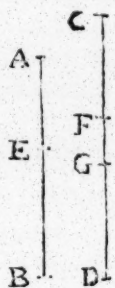
Sint divisæ magnitudines proportionales AE EB CF FD : hoc est ut AE ad EB , ita CF ad FD . dico etiam compositas proportionales esse, videlicet ut AB ad BE ,

ita esse CD ad DF . Si enim non est ut AB ad BE , ita CD ad DF ; erit ut AB ad BE , ita CD vel ad minorem quàm FD , vel ad majorem. sit primo ad minorem, nempe ad DG . & quoniam est ut AB ad BE , ita CD ad DG , compositæ magnitudines sunt proportionales; ergo & divisæ proportionales

a 17. hujus. erunt *a*. est igitur ut AE ad EB , ita CG ad GD . ponitur autem ut AE ad EB , ita CF ad

b 11. hujus. FD . quare & *b* ut CG ad GD , ita CF ad FD .

at CG prima major est quam tertia CF . ergo & secunda DG quàm quarta DF major *c* erit. sed & minor, quod fieri non potest. Non igitur est ut AB ad BE , ita CD ad DG . similiter ostendemus neque esse ad majorem quàm DF . ad ipsam igitur DF sit necesse est. Quare si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XIX. THEOR.

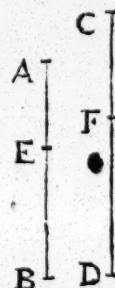
Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD , ita ablata AE ad ablatam CF . dico & reliquam EB ad reliquam FD ita esse ut tota AB ad totam CD . Quoniam enim est ut tota AB ad totam CD , ita

a 16. hujus. AE ad CF . & permutando erit *a* ut AB ad AE , ita CD ad CF . quoniam vero compositæ magnitudines sunt proportionales, & divisæ

b 17. hujus. proportionales erunt *b*, ut igitur BE ad EA , ita DF ad FC : rursusque permutando ut *a*

c 11. hujus. BE ad DF , ita EA ad FC . sed ut AE ad CF , ita posita est AB ad CD . & reliqua *c* igitur EB erit ad reliquam FD , ut tota AB ad totam CD . Quare si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam. Quod demonstrare oportebat.



Cor. Si quatuor magnitudines proportionales sint, per conversionem rationis proportionales erunt. Sit enim ut AB ad BE , ita CD ad DF , erit permutando AB ad CD , ita BE ad ablatam DF , erit & reliqua AE ad reliquam CF , ut tota AB ad totam CD . quare rursus permutando & invertendo erit ut AB ad AE , ita CD ad CF . quod est per conversionem rationis.

PROP. XX. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportionē; ex æquali autem prima major sit, quam tertia: & quarta quàm sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

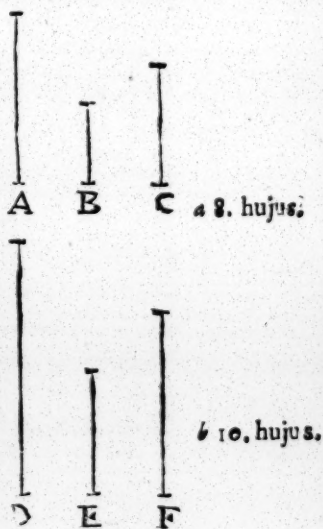
Sint tres magnitudines $A B C$, & aliæ ipsis numero æquales $D E F$ binæ sumptæ sint in eadem proportionē; sitque

ut A ad B , ita D ad E , & ut B ad C , ita E ad F ; ex æquali autem major sit A quam C . dico & D quam F majorem esse; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem.

Quoniam enim A major est quàm C , alia vero est utcunque B , & major ad eandem majorem habet a proportionem quàm minor; habebit A ad B majorem proportionem quam C ad B . sed ut A ad B , ita D ad E ; &

invertendo ut C ad B , ita F ad E . ergo & D ad E majorem habet proportionem quam F ad E . ad eandem vero proportionem habentium, quæ majorem habet proportionem, illa major b est. major igitur est D quam F .

similiter ostendemus & si A sit æqualis C , & D ipsi F æqualem esse; & si minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, & in eadem proportionē: ex æquali autem prima major sit quam tertia; & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod ostendere oportebat.



PROP. XXI. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem proportionē; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima maior sit quam tertia: & quarta quam sexta maior erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Sint tres magnitudines $A B C$, & aliæ ipsis numero æquales $D E F$, binæ sumptæ & in eadem proportionē. fit autem perturbata earum analogia, videlicet ut A quidem ad B , ita E ad F ; ut vero B ad C , ita D ad E ; & ex æquali A maior sit quam C . dico & D quam F majorem esse; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. Quoniam enim maior est A quam C , alia vero est B ; habebit; ^a A ad B majorem proportionem quam C ad B . sed ut A ad B , ita E ad F : & invertendo ut C ad B , ita E ad D . quare & E ad F majorem habebit proportionem quam E ad D . ad quam vero eadem majorem proportionem habet illa minor est ^b. minor igitur est F quam D ; ac propterea D quam F major erit. similiter ostendemus & si A sit æqualis C , & D ipsi F esse æqualem; & si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur & in eadem proportionē, sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali autem prima maior sit quam tertia: & quarta quam sexta maior erit; & si æqualis, æqualis; & si minor minor. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XXII. THEOR.

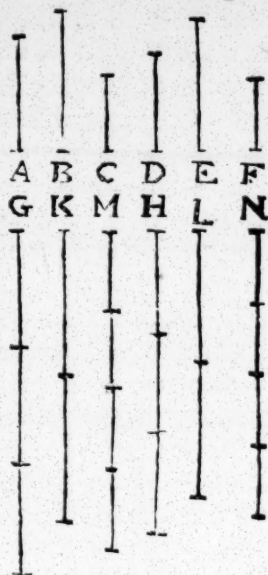
Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportionē: & ex æquali in eadem proportionē erunt.

Sint quotcunque magnitudines $A B C$, & aliæ ipsis numero æquales $D E F$, binæ sumptæ in eadem proportionē, hoc est ut A quidem ad B , ita D ad E , ut autem B ad C , ita E ad F . dico & ex æquali in eadem proportionē esse, ut A ad C , ita D ad F . sumantur enim ipsarum quidem $A D$ æque multiples $G H$; ipsarum vero $B E$ aliæ utcunque æque multiples

plices KL, & ipsarum CF aliæ utcunque æque multiples

MN. Quoniam igitur est ut A ad B, ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum A D æque multiples GH, & ipsarum BE aliæ utcunque æque multiples KL; erit ut ^a G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. & cum sint tres magnitudines G K M, & aliæ ipsis numero æquales H L N, binæ sumptæ & in eadem proportionē; ex æquali ^b si G superat M, & H ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. suntque G H ipsarum A D æque multiples, & M N ipsarum C F aliæ utcunque æque multiples. ut igitur A ad C, ita erit ^c D ad F.

Quare si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportionē: & ex æquali in eadem proportionē erunt. Quod demonstrare oportebat.



^a 4. hujus.

^b 20. hujus.

^c 5. Defn. hujus.

PROP. XXIII. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportionē; sit autem perturbata earum analogia: & ex æquali in eadem proportionē erunt.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales, binæ sumptæ in eadem proportionē, D E F; sit autem perturbata earum analogia, hoc est sit ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C, ita D ad E. dico ut A ad C, ita esse D ad F. Sumantur ipsarum quidem A B D æque multiples G H L: ipsarum vero C E F aliæ utcunque æque multiples M N. & quoniam G H æque multiples sunt ipsarum A B, partes autem eandem habent proportionem quam habent æque



H 4

ipsa-

- a* 15. hujus. ipsarum multiplices : erit *a* ut A ad B, ita G ad H. & similitudine ut E ad F, ita M ad N. atque est ut A ad B, ita E ad F. ut *b* igitur G ad H, ita M ad N. rursus quoniam est ut B ad C ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum B D æque multiplices H L, ipsarum vero C E aliæ utcumque æque multiplices K M : erit ut H ad K, ita L ad M. ostensum autem est & ut G ad H, ita esse M ad N. quoniam igitur tres magnitudines proportionales sunt G H K, & aliæ ipsis numero æquales L M N, binæ sumptæ in eadem proportionem, estque ipsarum perturbata analogia ; ex æquali, si *c* G superat K, & L ipsam N superabit ; & si æqualis, æqualis ; & si minor, minor. sunt autem G L ipsarum A D æque multiplices : & K N æque multiplices ipsarum C F. ut igitur *d* A ad C, ita erit D ad F. Quare si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportionem, sit autem perturbata earum analogia : & ex æquali in eadem proportionem erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam ; habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam : & composita prima cum quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum sexta ad quartam.

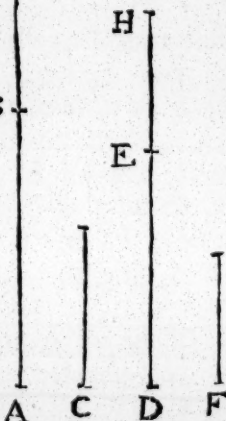
Prima AB ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia DE ad quartam F. habeat *e* autem & quinta BG ad secundam C proportionem eandem quam sexta EH ad quartam F, dico & compositam primam cum quinta AG ad secundam C eandem proportionem habere, quam tertiam cum sexta DH ad quartam F. Quoniam enim est ut BG ad C, ita EH ad F ; erit invertendo ut C ad BG, ita F ad EH. & quoniam ut AB ad C, ita est DE ad F : ut autem C ad BG, ita F ad EH ; erit *a* ex æquali ut AB ad BG, ita DE ad EH. quod cum divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales *b* erunt. ut igitur AG ad GB, ita est DH ad HE. sed &

a 22. hujus.

b 18. hujus.

c hypoth.

ut *c* GB ad C, ita HE ad F. ergo, ex *a* æquali, ut AG ad C, ita



erit

erit DH ad F . Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quàm tertia ad quartam: habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem quam sexta ad quartam: & composita prima cum quinta ad secundam eandem proportionem habebit quam tertia cum sexta ad quartam. Quod ostendere oportebat.

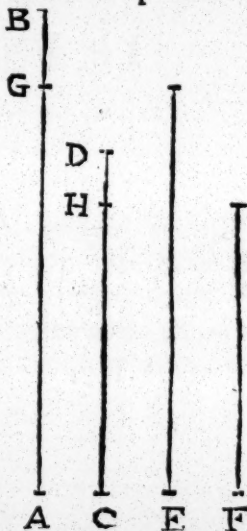
PROP. XXV. THEOR.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima, duabus reliquis majores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, CD, E, F ; & fit ut AB ad CD , ita E ad F . fit autem maxima ipsarum AB , & F minima. dico AB & F ipsis CD & E majores esse. ponatur enim ipsi quidem E æqualis AG , ipsi vero F æqualis CH . Quoniam igitur est ut AB ad

CD , ita E ad F : estque AG æqualis E , & CH æqualis F ; erit ut AB ad DC , ita AG ad CH . & quoniam est ut tota AB ad totam CD , ita ablata AG ad ablatam erit CH ; & reliqua GB ad reliquam HD ut tota AB ad CD totam. major autem est AB quam CD . ergo & GB quam HD major erit. quod cum AG sit æqualis ipsi E , & CH ipsi F ; erunt AG & F ipsis CH & E æquales. si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo

GB HD inæqualibus existentibus, quippe cum GB sit major, si ipsi quidem GB addantur AG & F , ipsi vero HD addantur CH & E : fient AB & F , ipsis CD & E necessario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima, duabus reliquis majores erunt. Quod demonstrare oportebat.



a 19. hujus.

EUCLIDIS.

EUCLIDIS

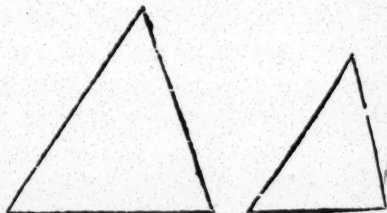
ELEMENTORUM

LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

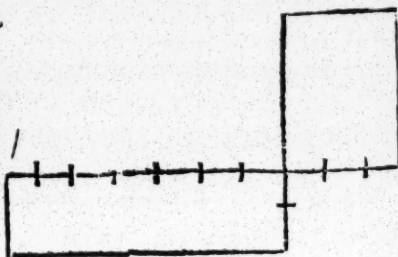
I.

Similes figuræ rectilineæ sunt quæ & singulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.



II.

Reciprocae figuræ sunt quando in utraque figura antecedentes, & consequentes rationum fuerint termini.



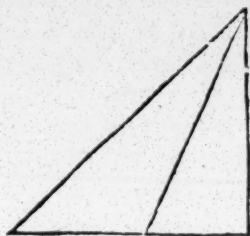
III.

Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, quando fit ut tota ad majus segmentum, ita majus segmentum ad minus.

IV.

IV.

Altitudo cujusque figuræ est linea perpendicularis, quæ à vertice ad basim ducitur.



V.

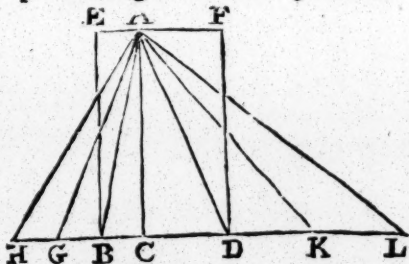
Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.

PROPOSITIO. I.

THEOREMA.

Triangula, & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

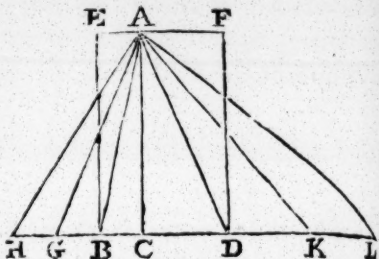
Sint triangula quidem ABC ACD , parallelogramma vero EC CF , quæ eandem habent altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. dico ut basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD , & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. producat BD ex utraque parte ad puncta HL , & ipsi quidem BC basi æquales quotcunque ponantur BG GH , ipsi vero basi CD ponantur quotcunque æquales DK KL , & AG AH AK AL jungantur. Quoniam igitur CB BG GH inter se æquales sunt, erunt & triangula AHG AGB ABC inter se æqualia. ergo quotuplex est basis HC ipsius BC basis, totuplex est AHC triangulum trianguli ABC . eadem ratione quotuplex est LC basis ipsius basis CD , totuplex est & triangulum ALC ipsius ACD trianguli: & si æqualis est HC basis basi CL , & triangulum AHC triangulo ALC est æquale: & si basis HC basim CL superat, & triangulum AHC superabit triangulum ALC : & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC CD , & duobus triangulis ABC ACD , sumpta sunt æque multiplicia basis quidem BC , & ABC trianguli,



a 38. primi.

videlicet

videlicet basis HC , & AHC triangulum: basis vero CD , & trianguli ACD , alia utcumque æque multiplicia, nempe CL basis, & ALC triangulum; atque ostensum est si HC basis basim CL superat, & triangulum AHC superare triangulum ALC ; & si æqualis, æquale; & si minor, minus. est igitur ^b ut BC basis ad basim CD , ita triangulum ABC ad ACD triangulum. Et quoniam trianguli



^b Def. 5.
quinti.

^c 41. primi.

^d 15. quinti.

^e 11. quinti.

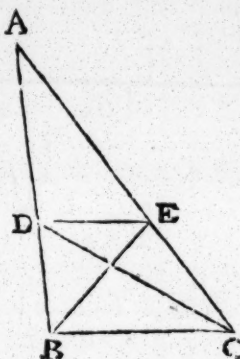
ABC duplum est ^c parallelogrammum EC , & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum ^c, partes ^d autem cum pariter multiplicibus eandem inter se proportionem habent: igitur ut ABC triangulum ad triangulum ACD , ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. quoniam igitur ostensum est ut basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD ; ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD , ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum; erit ^e ut BC basis ad basim CD , ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum. Quare triangu- & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

PROP. II. THEOR.

Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera, & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC , parallela ducatur DE . dico ut BD ad DA , ita esse CE ad EA . jungantur BE , CD . ^a 37. primi. triangulum igitur BDE triangulo CDE est ^a æquale, in eadem enim sunt basi DE , & in eisdem DF & BC parallelis; aliud autem triangulum est ADE : sed æqualia ad idem eandem habent ^b proportionem; ergo ut triangulum BDE ad triangulum ADE , ita est CDE triangulum ad triangulum ADE . ^b 7. quinti. ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE , ita ^c est BD ad DA ; nam cum eandem altitudinem habent, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt ut bases. & ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE , ita CE ad EA . & igitur ut BD ad DA , ^c 1. hujus. ita est ^d CE ad EA . Et si trianguli ABC latera AB , AC ^d 11. quinti. ita est ^d CE ad EA . Et si trianguli ABC latera AB , AC pro-

proportionaliter secta sunt, *i. e.* ut BD ad DA , ita sit CE ad EA ; jungatur DE . dico DE ipsi BC parallelam esse. iisdem constructis, quoniam est ut BD ad DA , ita CE ad EA ; ut autem BD ad DA , ita est BDE triangulum ad triangulum ADE ; & ut CE ad EA , ita CDE triangulum ad triangulum ADE , erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE , ita CDE triangulum ad triangulum ADE . quod cum utrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum f triangulo CDE æquale; & sunt in eadem basi DE . æqualia autem triacula, & in eadem basi constituta, etiam in eisdem g sunt parallelis. ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. Quod oportebat demonstrare.



e 11. quinti.

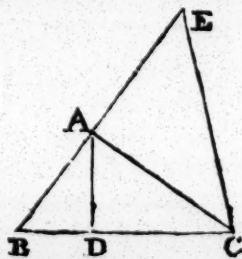
f 9. quinti.

g 39. primi.

PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

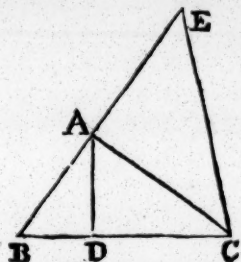
Sit triangulum ABC , & secetur angulus BAC bifariam a recta linea AD . dico ut BD ad DC , ita esse BA ad AC . ducatur per C ipsi DA parallela b CE , & producta BA conveniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædam AC , erit ACE angulus angulo CAD æqualis. sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD . ergo & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. rursus quoniam in parallelas AD EC recta linea



b 31. primi.

c 29. primi.

- linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis est $\angle$ interiori AEC . ostensus autem est & angulus ACE angulo BAD æqualis. ergo & ACE ipsi AEC æqualis erit : ac propterea
- d* 6. primi. latus AE æquale *d* lateri AC . & quoniam uni laterum trianguli BCE , videlicet ipsi EC
- e* 2. hujus. parallela ducta est AD ; erit *e* ut BD ad DC , ita BA ad AE ; æqualis autem est AE ipsi AC .
- f* 7. quinti. est igitur *f* ut BD ad DC , ita BA ad AC . Et si fit ut BD ad DC , ita BA ad AC , & AD jungatur. dico angulum BAC bifariam sectum esse recta linea AD . iisdem enim constructis, quoniam est ut BD ad DC , ita BA ad AC ; sed & ut
- g* 2. hujus. BD ad DC , ita *g* BA ad AE , etenim uni laterum trianguli
- b* 11. quinti. BCE , videlicet ipsi EC parallela ducta est AD , erit *b* & ut
- i* 9. quinti. BA ad AC , ita BA ad AE . ergo AC est *i* æqualis AE , ac
- k* 5. primi. propterea & angulus AEC angulo ACE *k* æqualis. sed angulus quidem AEC est æqualis angulo exteriori BAD ; an-
- l* 29. primi. gulus vero ACE æqualis *l* alterno CAD . quare & BAD angulus ipsi CAD æqualis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD . Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea etiam basim secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & si basis partes eandem proportionem habent, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

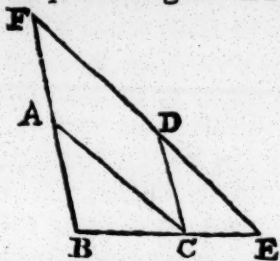


PROP. IV. THEOR.

Æquiangulorum triangulorum latera quæ circum æquales angulos sunt, proportionalia sunt. & homologa, sive ejusdem rationis sunt latera quæ æqualibus angulis subtenduntur.

- Sint æquiangula triangula ABC DCE , quæ angulum quidem ABC angulo DCE , angulum vero ACB angulo DEC æqualem habeant, & præterea angulum BAC angulo CDE . dico triangulorum ABC DCE proportionalia esse latera quæ sunt circa æquales angulos; & homologa, sive ejusdem rationis latera esse quæ æqualibus angulis subtenduntur. ponatur BC in directum ipsi CE . Et quoniam
- a* 17. primi. anguli ABC ACB duobus rectis minores *a* sunt, æqualis autem est angulus ACB angulo DEC ; erunt ABC DEC anguli

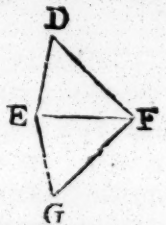
guli duobus rectis minores. quare $BAED$ productæ inter se convenient b ; producantur, & convenient in puncto F . b 12. axio-
& quoniam angulus DCE est æqualis angulo ABC ; erit primi.
 c 28. primi.
 c BF ipsi DC parallela. rur-
sus quoniam æqualis est an-
gulus ACB angulo DEC , pa-
rallela c erit AC ipsi FE . pa-
rallelogrammum igitur est
 $FACD$; ac propterea FA
quidem ipsi CD , AC vero
ipsi FD est æqualis. & quo-
niam uni laterum trianguli FBE , videlicet ipsi FE , parallela
ducta est AC ; erit c ut BA ad AF , ita BC ad CE . æqualis
autem est AF ipsi CD . ut igitur BA ad CD . ita BC ad CE ,
& permutando ut BA ad BC ita CD ad CE . rursus quoniam
 CD parallela est BF , erit c ut BC ad CE , ita FD ad DE . sed
 FD est æqualis AC . ergo ut BC ad CE , ita AC ad DE . per-
mutando igitur, ut BC ad CA ita CE ad ED . itaque quoniam
ostensum est, ut AB ad BC ita DC ad CE , ut autem BC ad
 CA ita CE ad ED : erit g ex æquali; ut BA ad AC ita CD ad
 DE . g 22. quinti.
Æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia
sunt latera quæ circum æquales angulos. & homologa,
sive ejusdem rationis, latera sunt quæ æqualibus angulis sub-
tenduntur. Quod demonstrare oportebat.



PROP. V. THEOR.

*Si duo triangu-
la latera proportionalia habeant, æquian-
gula erunt triangu-
la, & æquales habebunt angulos
quibus homologa latera subtenduntur.*

Sint duo triangu-
la ABC DEF , quæ latera proportionalia
habeant, hoc est, sit ut AB quidem ad BC , ita DE ad EF : ut
autem BC ad CA , ita EF ad FD : & adhuc ut BA ad AC ,
ita ED ad DF . dico trian-
gulum ABC triangulo DEF
æquiangulum esse, & æqua-
les habere angulos quibus
homologa latera subtendun-
tur, angulum quidem ABC
angulo DEF , angulum ve-
ro BCA angulo EFD , &



præterea angulum BAC angulo EDF . Constituatur enim a 23. primi.
ad rectam lineam EF , & ad puncta in ipsa EF , angulo qui-
dem ABC æqualis angulus FEG ; angulo autem BCA an-
gulus

b 2. Cor. 32. *primi.* gulus EFG . quare reliquus BAC angulus *b* reliquo EGF est æqualis. ideoque æquiangulum est triangulum ABC triangulo EGF . triangulorum igitur ABC EGF proportionalia

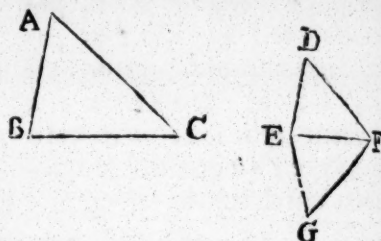
sunt latera quæ æqualibus angulis subtendunt. ergo ut AB

c 4. hujus. ad BC , ita GE ad EF . sed ut AB ad BC , ita DE ad EF . ut

d 11. quinti. igitur DE ad EF , ita d GE ad EF . quod cum utraque ipsarum DB EG ad EF eandem

e 9. quinti. proportionem habeat, erit *e* DE ipsi EG æqualis. Eadem ratione & DF æqualis FG . itaque quoniam DE est æqualis EG , communis autem EF ;

duæ DE EF duabus GE EF æquales sunt, & basis DF basi FG æqualis. angulus igitur DEF est æqualis *f* angulo GEF , & DEF triangulum æquale triangulo GEF , & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DEF est æqualis angulo GEF , angulus vero EDF æqualis angulo EGF ; & quoniam angulus DEF est æqualis angulo GEF , & angulus GEF angulo ABC , erit & angulus ABC angulo FED æqualis. eadem ratione & angulus ACB æqualis est angulo DFE , & adhuc angulus ad A angulo ad D . ergo ABC triangulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur. Quod oportebat demonstrare.



PROP. VI. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

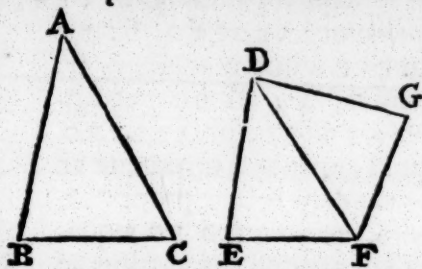
Sint duo triangula ABC DEF , unum angulum BAC uni angulo EDF æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, hoc est, sit ut BA ad AC , ita ED ad DF . dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, & angulum quidem ABC habere æqualem angulo DEF ; angulum vero ACB angulo DFE . *a* 23. primi. Constituatur *a* enim ad rectam lineam DF , & ad puncta in ipsa DF , alterutri angulorum BAC EDF æqualis angulus FDG , angulo autem ACB æqualis DFG . reliquus igitur

igitur ad B reliquo ad G est b æqualis. ergo triangulo ABC triangulo DGF æquiangulum est; ac propterea ut BA ad AC ita est GD ad DF : ponitur autem & ut BA ad AC , ita ED ad DF . ut igitur ED ad DF , ita GD ad DF . quare ED æqualis est ipsi DG , & communis DF . ergo duæ ED DF duabus GD DF æquales sunt & angulus EDF angulo GDF est æqualis; basis igitur EF est æqualis basi FC , triangulumque DEF æquale triangulo GDF , & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFG est æqualis angulo DFE ; angulus vero ad G angulo ad E . sed angulus DFG æqualis est angulo ACB : & angulus igitur ACB angulo DFE est æqualis. ponitur autem & BAC angulus æqualis angulo EDF , ergo & reliquus qui ad B æqualis b est reliquo ad E . æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF . Quare si duo triacula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triacula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur. Quod ostendere oportebat.

PROP. VII. THEOR.

Si duo triacula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triacula, & æquales habebunt angulos circa quos latera sunt proportionalia.

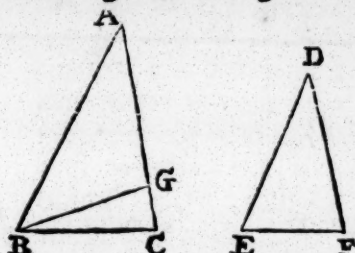
Sint duo triacula ABC DEF , unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos ABC DEF latera proportionalia, ut sit DE ad EF , sicut AB ad BC : & reliquorum qui ad C F utrumque simul minorem vel non minorem recto. dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse; angulumque ABC æqualem angulo DEF , & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F æqualem. Si inæqualis est angulus ABC angulo DEF , unus ipsorum major erit; sit major ABC : & constituatur a ad rectam lineam AB , & ad punctum in ipsa E , angulo DEF æqualis angulus ABG . & quo;



b 2. Cor. 32.
primi.
c 4. hujus.

quoniam angulus quidem A est æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF: erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis b. æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF.

quare ut c AB ad BG, sic DE ad EF: utque DE ad EF, sic ponitur AB ad BC. ut igitur AB ad BC, sic AB ad BG. quod cum AB ad utrumque BC BG eandem habeat proportionem, erit BC ipsi BG æqua-



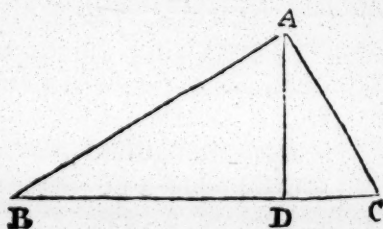
d 9. quinti. lis d: ac propterea angulus ad c est æqualis e angulo BGC.

quare uterque angulorum BGC BGC minor est recto, igitur qui ei deinceps est AGB major est recto. atque ostensus est angulus AGE æqualis angulo qui ad F. angulus igitur qui ad F recto major est. atqui ponitur non major: cum C non est major recto, quod est absurdum. non igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF. ergo ipsi est æqualis. est autem & angulus ad A æqualis ei qui ad D. quare & reliquus qui ad C æqualis b reliquo qui ad F. æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. Si igitur duo triangu- la unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangu- la, & æquales habebunt angulos circa quos proportionalia sunt latera. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VIII. THEOR.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangu- la, & toti, & inter se similia sunt.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC: & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. dico triangu- la ABD ADC toti triangulo ABC, & inter se similia esse. Quoniam enim angulus BAC est æqualis angulo ADB, rectus enim uterque est, & angulus ad B communis duobus

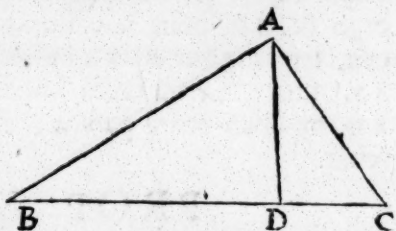


a 2. Cor. 32.
primi.

b 4. hujus.

triangulis ABC ABD; erit a reliquus ACB reliquo BAD æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD. quare b ut BC quæ subtendit angulum rectum trianguli ABC, ad BA subtenden- tem

tem angulum rectum trianguli ABD , sic ipsa AB subtendens angulum ad C trianguli ABC , ad DB subtendentem angulum æqualem angulo ad C , videlicet BAD ipsius ABD trianguli; & adhuc AC ad AD subtendentem angulum ad B communem duobus triangulis. ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum est; & circa æquales angulos latera habet proportionalia. simile igitur est triangulum ABC triangulo ABD . eadem ratione demonstrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse. quare utrumque ipsorum ABD ADC toti ABC triangulo est simile. Dico insuper triangula ABD ADC etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus BDA rectus est æqualis recto ADC ; sed & BAD ostensus est æqualis angulo ad C ; erit reliquus ad B reliquo DAC æqualis^a. æquiangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC . ergo^b ut BD trianguli ABD subtendens BAD angulum, ad DA trianguli ADC subtendentem angulum qui est ad C , æqualem angulo BAD , sic ipsa AD trianguli ABD subtendens angulum ad B , ad DC subtendentem angulum DAC ei qui est ad B æqualem; & adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC . simile igitur est ABD triangulum triangulo ADC . Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt. Quod oportebat demonstrare.



^a 1. Def. hujus.

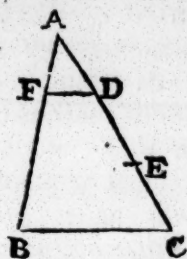
Cor. Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularem ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis: & præterea inter basim & basis segmentum utrumlibet, latus segmento conterminum, medium esse proportionale;

PROP. IX. PROBL.

A data recta linea imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea AB . oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia; & ducatur à puncto A quædam recta linea AC , quæ cum ipsa AB angulum quemlibet contineat; sumaturque in AC quodvis punctum D , & ipsi AD æquales^a ponantur DE EC , deinde^a 3. primi, jungatur

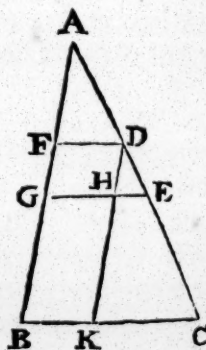
* 31. primi. jungatur BC ; per D ipsi BC parallela b ducatur DF . Itaque quoniam uni laterum trianguli ABC , videlicet ipsi BC , parallela ducta est FD ; erit c ut CD ad DA , ita BF ad FA ; dupla autem est CD ipsius DA . ergo & BF ipsius FA dupla erit. tripla igitur est BA ipsius AF . quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abscissa est. Quod facere oportebat.



PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam infectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.

Sit data quidem recta linea infecta AB , secta vero AC , oportet rectam lineam AB infectam ipsi AC sectæ similiter secare. fit secta AC in punctis D & E , & ponantur ita, ut angulum quemvis contineant, junctaque BC per puncta quidem D & E ipsi BC parallelæ a ducantur $DFEG$: per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK . parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum FH HB : ac propterea DH quidem est b æqualis FG , HK vero ipsi GB . & quoniam uni laterum trianguli DKC , ipsi scilicet KC , parallela ducta est HE ; erit c ut CE ad ED , ita KH ad HD . æqualis autem est KH quidem ipsi GB , HD vero ipsi GF . est igitur ut CE ad ED , ita GB ad GF . rursus quoniam uni laterum trianguli AGE , nimirum ipsi EG , parallela ducta est FD , ut ED ad DA , ita c erit GF ad FA . sed ostensum est ut CE ad ED , ita esse GB ad GF . ut igitur CE ad ED , ita est GB ad GF , & ut ED ad DA , ita GF ad FA . ergo data recta linea infecta AB , datæ rectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. Quod facere oportebat.

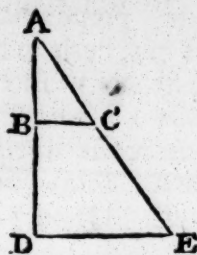


PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB AC , & ponantur ita ut angulum quemvis contineant. oportet ipsis AB AC tertiam

tertiā proportionalem invenire. Producantur AB AC ad puncta D E : ponaturque ipsi AC æqualis BD ; & juncta BC , ducatur a per D ipsi BC parallela DE . quoniam igitur uni laterum trianguli ADE , videlicet ipsi DE parallela ducta est BC , erit b ut AB ad BD , ita AC ad CE . æqualis autem est BD ipsi AC , ut igitur AB ad AC , ita est AC ad CE . quare datis rectis lineis AB AC tertia proportionalis inventa est CE . Quod facere oportebat.



a 31. primi.

b 2. hujus.

PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis quartā proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ ABC . oportet ipsis ABC quartā proportionalem invenire. Exponentur duæ rectæ lineæ DE DF angulum

quemvis EDF continentēs:

& ponatur ipsi quidem A æqualis DG , ipsi vero B æqualis GE , & ipsi C æqualis DH : junctaque GH , per G ipsi parallela a ducatur EF .

itaque quoniam uni laterum



$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$$

a 31. primi.

trianguli DEF , nimirum ipsi EF , parallela ducta est GH , erit ut DG ad GE ita b DH ad HF . est autem DG ipsi A æqualis; b 2. hujus. GE vero æqualis B , & DH æqualis C , ut igitur A ad B , ita C ad HF . quare datis tribus rectis lineis ABC quarta proportionalis inventa est HF . Quod facere oportebat.

PROP. XIII. PROBL.

Duabus datis rectis lineis mediā proportionalem invenire.

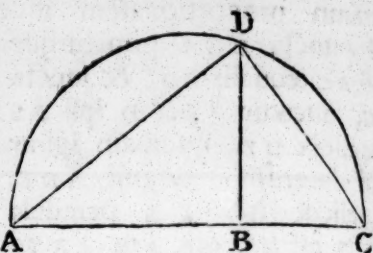
Sint datæ duæ rectæ lineæ ABC . oportet inter ipsas ABC mediā proportionalem invenire. Ponantur in directum, & super ipsa AC describatur semicirculus ADC , ducaturque a à puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD , & AD DC jungantur. Quoniam igitur angulus ADC est in semicirculo, is rectus b est. & quoniam in triangulo rectan-

a 11. primi.

b 31. tertii.

e Cor. 8.
hujus.

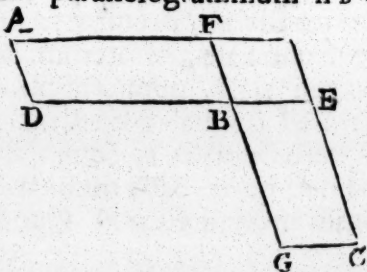
gulo ADC , ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB , erit DB media proportionalis e inter segmenta basis $ABBC$. duabus igitur datis rectis lineis $ABBC$ media proportionalis inventa est. Quod facere oportebat.



PROP. XIV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum latera quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt: Et quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum, latera quæ circum æquales angulos, sunt reciproca; ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma $ABBC$, æquales habentia angulos ad B , & ponantur in directum $DBBE$. ergo & in directum a erunt $FBBC$. dico parallelogrammorum $ABBC$ latera quæ sunt circum æquales angulos reciproca esse: hoc est ut DB ad BE ita esse GB ad BF . Compleatur enim parallelogrammum FE . & quoniam parallelogrammum AB æquale est parallelogrammo BC , aliud autem aliquod est FE parallelogrammum, erit ut AB ad FE b, ita BC ad FE . sed ut AB quidem ad FE , ita c est DB ad BE ; ut autem BC ad FE , ita c GB ad BF ; ut igitur d DB ad BE , ita GB ad BF .



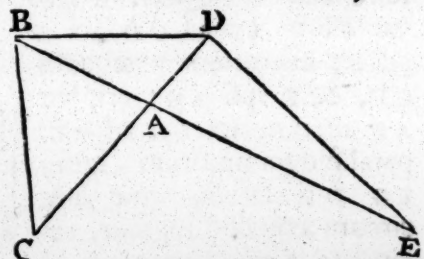
ergo parallelogrammorum $ABBC$ latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent. Et si reciproca sunt seu ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera quæ sunt circum æquales angulos, sit nempe ut DB ad BE , ita GB ad BF . dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC æquale esse. quoniam enim est ut DB ad BE , ita GB ad BF , ut autem DB ad BE , ita e AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE , & ut GB ad BF , ita e BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE ; erit d & e 9. quinti. ut AB ad FE , ita BC ad FE . æquale igitur est AB e parallelogrammum parallelogrammo BC . Ergo æqualium & unum uni

uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, seu ex contraria parte sibi ipsis respondent: & quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, sunt reciproca: Et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia triângula ABC ADE unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum scilicet BAC angulo DAE . dico triangulorum ABC ADE latera quæ circum æquales angulos reciproca esse, hoc est ut CA ad AD , ita esse EA ad AB . ponantur enim ita ut in directum sit CA ipsi AD . ergo & EA ipsi AB in directum a erit; & a 14. primi.

 b 7. quinti.

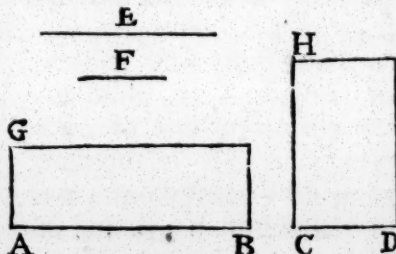
quoniam igitur triângulum ABC æquale est triângulo ADE , aliud autem est ABD ; erit ut CAB triângulum ad triângulum BAD , ita b triângulum ADE ad triângulum BAD . sed ut triângulum quidem CAB ad BAD triângulum, ita c CA ad AD , ut autem triângulum EAD ad ipsum BAD , ita c EA ad AB . ut d igitur CA ad AD , ita EA ad AB . quare triangulorum ABC ADE latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt. Et si reciproca sunt latera triangulorum ABC ADE , scilicet sit ut CA ad AD , ita EA ad AB . dico triângulum ABC triângulo ADE æquale esse. juncta enim rursus BD , quoniam ut CA ad AD , ita est EA ad AB , ut autem CA ad AD , ita c ABC triângulum ad triângulum BAD ; & ut EA ad AB , ita c triângulum EAD ad BAD triângulum, erit d ut ABC triângulum ad triângulum BAD , ita triângulum EAD ad BAD triângulum. utrumque igitur triangulorum ABC ADE ad triângulum BAD eandem habet proportionem; ac propterea e æquale est ABC triângulum e 9. quinti.

gulum triangulo ADE . $\text{\AA}$ equalium igitur, & unum uni $\text{\AA}$ -
qualem habentium angulum triangulorum latera quæ cir-
cum $\text{\AA}$ quales angulos, reciproca sunt: & quorum triangulo-
rum unum uni $\text{\AA}$ qualem habentium angulum latera, quæ
circum $\text{\AA}$ quales angulos reciproca sunt, ea inter se sunt $\text{\AA}$ -
qualia. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

*Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangu-
lum sub extremis contentum $\text{\AA}$ quale est ei rectan-
gulo quod sub mediis continetur: Et si rectangulum
sub extremis contentum $\text{\AA}$ quale fuerit ei quod sub
mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportio-
nales erunt.*

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales $AB CDE F$, sit-
que ut AB ad CD , ita E ad F . dico rectangulum contentum
sub rectis lineis $AB F$ $\text{\AA}$ quale esse ei quod sub ipsis CDE
continetur. ducantur enim ^a à punctis $A C$ ipsis $AB CD$ ad
rectos angulos $AG CH$; ponaturque ipsi quidem F $\text{\AA}$ qualis
 AG , ipsi vero E $\text{\AA}$ qualis CH , & compleantur $BG DH$ paral-
lelogramma. Quoniam igitur est ut AB ad CD , ita E
ad F ; est autem E $\text{\AA}$ qualis CH , & F ipsi AG : erit ^b ut
 AB ad CD , ita CH ad AG . parallelogrammorum igitur
 $BG DH$ latera, quæ sunt circum $\text{\AA}$ quales angulos, re-
ciproca sunt; quoniam autem $\text{\AA}$ quiangulorum parallelo-
grammorum latera, quæ sunt circum $\text{\AA}$ quales angulos,
reciproca sunt, ea inter se sunt ^c $\text{\AA}$ qualia. ergo paral-
lelogrammum BG $\text{\AA}$ quale est parallelogrammo DH . at-
que est parallelogrammum quidem BG , quod sub rectis
lineis $AB F$ continetur, etenim AG est $\text{\AA}$ qualis F ; parallelo-
grammum vero DH , quod continetur sub ipsis CDE , cum
 CH ipsi E sit $\text{\AA}$ qualis. rectangulum igitur contentum sub
 AB & F est $\text{\AA}$ quale ei quod sub ipsis CD & E continetur.
Et si rectangulum contentum sub $AB F$ sit $\text{\AA}$ quale ei quod
sub CD & E continetur. dico quatuor rectas lineas propor-
tionales esse, videlicet ut AB ad CD , ita E ad F . iisdem $\text{\AA}$ -
nim constructis quoniam rectangulum contentum sub AB
& F est $\text{\AA}$ quale ei quod sub CD & E continetur, atque est
contentum



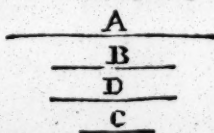
contentum quidem sub $A B F$ rectangulum $B G$, etenim $A G$ est æqualis F ; contentum vero sub $C D E$ est rectangulum $D H$, quòd $C H$ ipsi E fit æqualis. erit parallelogrammum $B G$ æquale parallelogrammo $D H$; & sunt æquiangula. æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt. quare ut $A B$ ad $C D$, ita $C H$ ad $A G$, æqualis autem est $C H$ ipsi E , & $A G$ ipsi F . ut igitur $A B$ ad $C D$, ita E ad F . Ergo si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei quod sub mediis continetur: & si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XVII. THEOR.

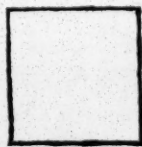
Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei quod à media fit quadrato: Et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales $A B C$; & fit ut A ad B , ita B ad C . dico rectangulum contentum sub $A C$ æquale esse ei quod à media B fit quadrato. ponatur ipsi B æqualis D . Et quoniam ut A ad B , ita B ad C , æqualis autem B ipsi

D ; erit ut A ad B , ita D ad C . si autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint rectangulum sub extremis contentum est æquale ei quod sub mediis continetur. ego rectangulum sub $A C$ contentum est



a 7. quinti.



D b 16. hujus.

æquale ei quod continetur sub $B D$. sed rectangulum contentum sub $B D$ est æquale quadrato quod fit ex ipsa B ; etenim B est æqualis D . rectangulum igitur contentum sub $A C$ est æquale ei quod ex B fit quadrato. Et si rectangulum contentum sub $A C$ æquale sit quadrato quod fit ex B . dico ut A ad B , ita esse B ad C . iisdem enim constructis, quoniam rectangulum contentum sub $A C$ æquale est quadrato quod fit ex B ; at quadratum quod fit ex B est rectangulum quod sub ipsi $B D$ continetur, est enim B æqualis ipsi D ; erit rectangulum contentum sub $A C$ æquale ei quod sub $B D$ continetur. si autem rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales

portionales b erunt. est igitur ut A ad B , ita D ad C ; æqualis autem B ipsi D . ergo ut A ad B , ita B ad C . Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum est æquale ei quod à media fit quadrato. Et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

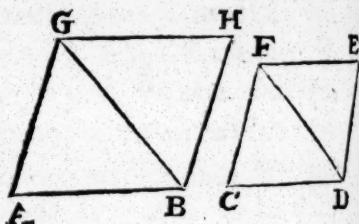
PROP. XVIII. PROBL.

A data recta linea dato rectilineo simile & similiter positum rectilineum describere.

Sit data recta linea AB , datum autem rectilineum CE . oportet à recta linea AB rectilineo CE simile, & similiter positum rectilineum describere. Jungatur DF , & ad rectam lineam AB , & ad puncta in ipsa AB , angulo quidem c æ-

a 23. primi. qualis angulus a constituatur GAB , angulo autem CDF angulus ABG . reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB

b 2. Cor. 32. primi. est b æqualis. ergo æquiangulum est FCD triangulum triangulo GAB ; ac propterea c ut FD ad GB , ita FC ad GA , & CD ad AB . rursus constituatur ad rectam lineam BG , & ad puncta in ipsa BG , angulo quidem DFE æqualis angulus BGH , angulo quidem FDE æqualis GBH . ergo reliquus b ad E reliquo ad H est æqualis. æquiangulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH . quare ut c FD ad GB , ita FE ad GH , & ED ad HB . ostensum autem est & ut FD ad GB , ita FC ad GA , & CD ad AB : & ut igitur a FC ad AG , ita CD ad AB , & FE ad GH , & adhuc ED ad HB . itaque quoniam angulus quidem CFD est æqualis angulo AGB ; angulus autem DFE angulo BGH . erit totus CDE angulus toti AGH æqualis. eadem ratione & CDE est æqualis ipsi ABH , & præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H . æquiangulum igitur est AH ipsi CE , & latera circum æquales ipsis angulos habet proportionalia. ergo rectilineum AH rectilineo CE simile c erit: A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE simile, & similiter positum rectilineum AH descriptum est. Quod facere oportebat.

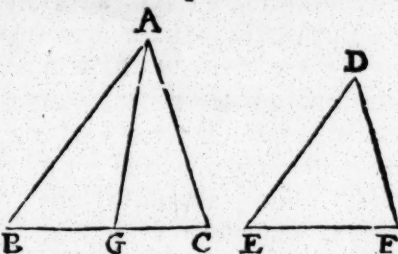


PROP. XIX. THEOR.

Similia triangula inter se sunt in duplicata proportionem laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æqualem angulo ad E , & sit ut AB ad BC , ita DE ad EF , ita ut latus BC homologum sit lateri EF . Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam proportionem habere ejus quam habet BC ad EF . Sumatur enim ipsis ABC EF ter-

a 11. hujus.



b 11. quinti.

tia proportionalis BG , ut sit BC ad EF ita EF ad BG . & jungatur GA . quoniam igitur ut AB ad BC , ita est DE ad EF ; erit permutando ut AB ad DE , ita BC ad EF . sed ut BC ad EF , ita EF ad BG . ut b igitur AB ad DE , ita EF ad BG . quare triangulorum ABG DEF latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt. quorum autem triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se æqualia c sunt. æquale igitur est ABG triangulum triangulo DEF . & quoniam est ut BC ad EF , ita EF ad BG ; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam proportionem d habet ejus quam habet ad secundam: habebit igitur BC ad BG duplicatam proportionem ejus quam habet BC ad EF . ut autem BC ad BG , ita ABC triangulum ad triangulum ABG e . ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam proportionem habet ejus quam BC habet ad EF . est autem ABG triangulum triangulo DEF æquale. & triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplicatam proportionem habebit ejus quam habet BC ad EF . Quare similia triangula inter se sunt in duplicata proportione laterum homologorum. Quod ostendere oportebat.

c 15. hujus.

d Def. 10. quinti.

e 1. hujus.

f 7. quinti.

Cor. Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod sit à prima ad triangulum quod à secunda simile, & similiter descriptum; quoniam ostensum est ut CB ad BG , ita ABC triangulum ad triangulum ABG , hoc est ad triangulum DEF . Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP.

PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

a 1. Def.
hujus.

b 6. hujus.

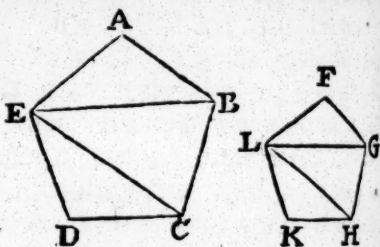
c 4. hujus.

d 22. quinti.

e 19. hujus.

f 11. quinti.

Sint similia polygona $ABCDEFGHKL$, & sit AB homologum ipsi FG . dico polygonum $ABCDEFGHKL$ in similia triangula dividi, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum $ABCDE$ ad polygonum $FGHKL$ duplicatam proportionem habere ejus quam habet AB ad FG . jungantur BE EC GL LH . Et quoniam simile est $ABCDE$ polygonum polygono $FGHKL$, angulus BAE angulo GFL est æqualis, atque est ut BA ad AE , ita GF ad FL . quoniam igitur duo triangula sunt ABE FGL unum angulum uni angulo æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia: erit b triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum. ergo c & simile. angulus igitur ABE æqualis est angulo FGL . est autem & totus ABC angulus æqualis d toti FGH , propter similitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH est æqualis. & quoniam ob similitudinem triangulorum ABE FGL , est e ut EB ad BA , ita LG ad GF . sed & propter similitudinem polygonorum f , ut AB ad BC , ita est FG ad GH ; erit ex æquali ut d EB ad BC , ita LG ad GH . hoc est circum æquales angulos EBC LGH latera sunt proportionalia; æquiangulum igitur b est EBC triangulum triangulo LGH . quare & c simile. eadem ratione & ECD triangulum simile est triangulo LHK . similia igitur polygona $ABCDEFGHKL$ in similia triangula dividuntur, & numero æqualia. dico & homologa totis: hoc est ut proportionalia sint triangula, & antecedentia quidem sunt ABE EBC ECD , consequentia autem ipsorum FGL LGH LHK ; & $ABCDE$ polygonum ad polygonum $FGHKL$ duplicatam proportionem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG . quoniam enim simile est ABE triangulum triangulo FGL , habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem e ejus quam habet BE ad GL . eadem ratione, & triangulum BEC ad GLH triangulum duplicatam d proportionem habet ejus quam BE ad GL . est f igitur ut ABE

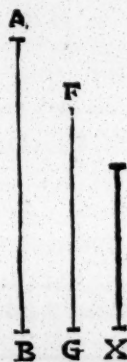


triangulum ad triangulum FGL , ita triangulum BEC ad GLH triangulum. rursus quoniam simile est triangulum BEC triangulo LGH , habebit BEC triangulum ad triangulum LGH duplicatam proportionem ejus quam recta linea CE habet ad rectam HL . eadem ratione & ECD triangulum ad triangulum LHK duplicatam proportionem habet ejus quam CE ad HL . est igitur ut triangulum BEC ad triangulum LGH , ita CED triangulum ad triangulum LHK . ostensum autem est & ut BEC triangulum ad triangulum LGH , ita triangulum ABE ad triangulum FGL . ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL , ita triangulum BEC ad GLH triangulum, & triangulum ECD ad ipsum LHK . & igitur ut unum antecedentium ad unum consequentium g , sic g 12. quinti. omnia antecedentia ad omnia consequentia. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL , ita $ABCDE$ polygonum ad polygonum $FGHKL$: sed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG , similia enim triangula in duplicata h sunt proportionem laterum homologorum. h 19. hujus. ergo & $ABCDE$ polygonum ad polygonum $FGHKL$ duplicatam proportionem habet ejus quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum ad homologum latus. Quod oportebat demonstrare.

Eodem modo & in similibus quadrilateris ostendetur ea esse in duplicata proportionem laterum homologorum. ostensum autem est & triangulis.

COROLL.

1. Ergo universe similes figuræ rectilineæ inter se sunt in duplicata proportionem homologorum laterum. & si ipsis $ABFG$ tertiam proportionalem sumamus, quæ sit x ; habebit AB ad x duplicatam proportionem ejus quam habet AB ad FG . habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam proportionem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG . atque ostensum est hoc in triangulis.



2. Universe igitur manifestum est, si tres rectæ lineæ propor-

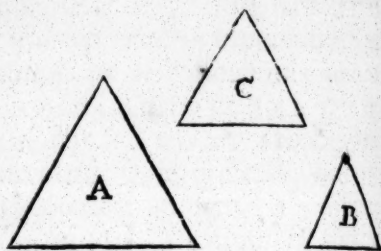
proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram quæ fit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter descriptam. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXI. THEOR.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

a 1. Def.
hujus.

Sit enim utrumque rectilineorum A B simile rectilineo C, dico & rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, & ipsi æquiangulum a erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, & circum æquales angulos latera proportionalia habebit a, utrumque igitur rectilineorum A B ipsi C æquiangulum est, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. quare & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea a A ipsi B est simile. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XXII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt. & si rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta, proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

a 18. hujus.

b 11. hujus.

e 22. quinti.
d 2. Cor. 20.
hujus.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B C D E F G H, & ut A B ad C D, ita sit E F ad G H. describanturque a ab ipsis quidem A B C D similia, & similiter posita rectilinea K A B L C D: ab ipsis vero E F G H describantur rectilinea similia, & similiter posita M F N H. dico. ut K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita esse rectilineum M F ad ipsum N H rectilineum. Sumatur ipsis b quidem A B C D tertia proportionalis x; ipsis vero E F G H tertia proportionalis o. & quoniam est ut A B ad C D, ita E F ad G H: ut autem C D ad x, ita G H ad o; erit ex æquali c ut A B ad x, ita E F ad o. sed ut A B quidem ad x, ita est d rectilineum K A B ad L C D rectilineum,

line
line
L C
N H
rect
ita
N H.
E F a
ita E
ipsa
N H
recti
ut A
defc
C D
L C D
P R
linea
lineu
recti
ctilin
ergo
neum
trum
erit
& fin
ut A
erit
linea
unt,
rectil
propo
erunt

Posit
pr
ex
cu

Sit
tionis
quate
nariu

lineum, ut autem EF ad O, ita d rectilineum MF ad rectilineum NH. ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum

LCD, ita est e rectilineum MF ad NH rectilineum. Et si sit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum NH. dico ut AB ad CD, ita esse EF ad GH. fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad f PR, & describatur a ab

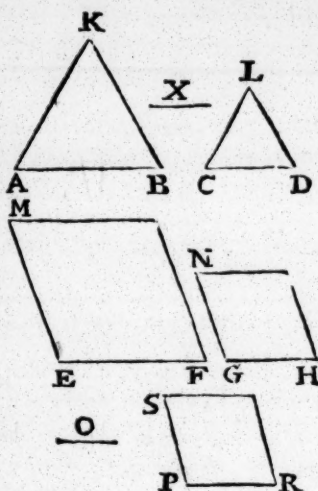
ipsa PR alterutri rectilineorum MF NH simile, & similiter positum rectilineum SR. quoniam igitur est ut AB ad CD, ita EF ad PR, & descripta sunt ab ipsis quidem AB CD familia, & similiter posita KAB LCD rectilinea, ab ipsis vero EF PR familia & similiter posita rectilinea MF SR, erit g ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad RS

rectilineum: ponitur autem & ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. ergo ut rectilineum MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineum SR. quod cum rectilineum MF ad utrumque ipsorum NH SR eandem habeat proportionem, erit h rectilineum NH ipsi SR æquale. est autem ipsi simile, & similiter positum. ergo GH est æqualis PR. & quoniam ut AB ad CD, ita est EF ad PR: æqualis autem PR ipsi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, familia, & similiter descripta proportionalia erunt: & si rectilinea quæ ab ipsis fiunt, familia, & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

LEMMA.

Positis tribus rectis quibuscunque A, B & C; ratio primæ A ad tertiam C, æqualis est rationi compositæ ex ratione primæ A ad secundam B, & ratione secundæ B ad tertiam C.

Sit V. G. numerus ternarius exponens seu denominator rationis A ad B, hoc est sit A triplo ipsius B, & sit numerus quaternarius exponens rationis B ad C, erit numerus duodenarius ex numeri ternarii & quaternarii multiplicatione compo-



e 11. quinti.

f 12. hujus.

g ex prius demonstratis.

h 9. quinti.

compositus exponens rationis A ad C; nam quia A continet B ter, & B continet C quater, continebit A ipsum C ter quater, seu duodecies. idem de aliis multiplicibus vel submultiplicibus verum est. Uniuersalis vero hujus Theorematis demon-

stratio talis est, Quantitas rationis A ad B est numerus $\frac{A}{B}$

scil. qui multiplicans consequentem producit antecedentem. Et

similiter quantitas rationis B ad B _____

c est $\frac{B}{C}$. Atque hæc due quanti- C—

tates inter se multiplicatæ efficiunt numerum $\frac{A \times B}{B \times C}$ qui est

quantitas rationis quam rectangulum comprehensum sub rectis A & B habet ad rectangulum sub B & C rectis. Adeoque dicta ratio rectanguli sub A & B, ad rectangulum sub B & C ea est quæ in sensu def. 5. hujus, componitur ex rationibus A ad B & B ad C. sed per I. 6. rectangulum sub A & B, est ad rectangulum sub B & C, ut A ad C. & igitur ratio A ad C æqualis est rationi compositæ ex rationibus A ad B, & B ad C.

Positis vero quatuor rectis quibuscunque A, B, C, & D; Ratio primæ A ad quartam D æqualis est rationi compositæ ex ratione primæ A ad secundam B, & ratione secundæ B ad tertiam C, & ratione tertiæ C ad quartam D.

Nam in tribus rectis A, C, & D,

ratio A ad D æqualis est rationi

compositæ ex rationibus A ad C,

& C ad D. Et hæcenus est o-

stensum rationem A ad C æqualem

esse rationi compositæ ex ratio-

nibus A ad B & B ad C. Et igi-

tur ratio A ad D æqualis est rationi compositæ ex rationibus A ad B, B ad C & C ad D. Similiter ostendetur, in quocunque rectis, rationem primæ ad ultimam æqualem esse rationi compositæ ex rationibus primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, & ita deinceps usque ad ultimam.

Si exponantur aliæ magnitudines quælibet, præter rectas, idem obtinebit. Quod constabit si concipiantur tot rectæ A, B, C &c. ordine positæ quot sunt magnitudines, & in eadem ratione: ita viz. ut recta A sit ad rectam B ut prima magnitudo ad secundam, & recta B ad rectam C ut secunda magnitudo ad tertiam, & ita porro. Manifestum est per 22. 5. esse ex æquo rectam A ad ultimam rectam sicut prima magnitudo ad ultimam. Sed ratio rectæ A ad ultimam rectam æqualis est rationi compositæ ex rationibus A ad B, B ad C, &

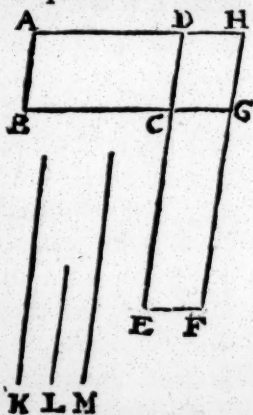
ita porro usque ad ultimam rectam. Et, ex hypothese, ratio cujuslibet rectae ad sibi proximam, eadem est cum ratione magnitudinis ejusdem ordinis ad sibi proximam. Et igitur ratio primae magnitudinis ad ultimam aequalis est rationi compositae ex rationibus primae magnitudinis ad secundam, secundae ad tertiam, & ita demceps usque ad ultimam. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIII. THEOR.

Æquiangula parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam.

Sint æquiangula parallelogramma AC CF æqualem habentia BCD angulum angulo ECG . dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compositam ex lateribus, videlicet compositam ex proportionem quam habet BC ad CG , & ex proportionem quam DC habet ad CE . ponatur enim ut BC sit in directum ipsi CG . ergo & DC ipsi CE in directum ϵ erit: & compleatur DG parallelogrammum: exponaturque recta linea quaedam K , & fiat ut BC ad CG , ita K ad L , ut autem DC ad CE , ita L ad M . proportionem igitur ipsius K ad L , & L ad M eadem sunt quæ proportionem laterum videlicet BC ad CG , & DC ad CE . sed proportio K ad M composita est ex proportionem K ad L , & proportionem L ad M . quare & K ad M proportionem habet ex lateribus compositam.

& quoniam est ut BC ad CG , ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH ; sed ut BC ad CG , ita K ad L : erit ϵ ut K ad L , ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum: rursus quoniam est ut DC ad CE , ita CH parallelogrammum ad parallelogrammum CF : ut autem DC ad CE , ita L ad M . ergo ut L ad M , ita erit ϵ parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum. itaque cum ostensum sit ut K quidem ad L ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH : ut autem L ad M , ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum; erit f ex æquali ut K ad M , ita AC parallelogrammum ad ipsum CF . habet autem K ad M proportionem ex lateribus compositam. ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compositam ex lateribus. Æquiangula igitur paral-



c 14. primi.

e 12. hujus.

e per Lemma superius.

d 1. hujus.

e 11. quinti.

f 22. quinti.

K

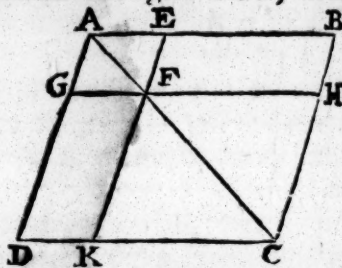
lelogramma

lelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIV. THEOR.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti, & inter se similia sunt.

Sit parallelogramma $ABCD$, cujus diameter AC : circa diametrum vero AC parallelogramma sint $EGHK$. dico parallelogramma $EGHK$ & toti $ABCD$, & inter se similia esse. Quoniam enim uni laterum trianguli ABC , videlicet ipsi BC parallela ducta est EF , erit a ut BE ad EA , ita CF ad FA . quoniam rursus uni laterum trianguli ACD , nempe ipsi CD ducta est parallela FG , ut CF ad FA , ita a erit DG ad GA . sed ut CF ad FA ita ostensa est & BE ad EA . ergo & ut BE ad EA , ita b DG ad GA , componendoque c ut BA ad AE , ita DA ad AG . & permutando ut BA ad AD , ita EA ad AG . parallelogrammorum igitur $ABCD$ EG latera, quæ circa communem angulum BAD , proportionalia sunt. & quoniam parallela est GF ipsi DC , angulus quidem AGF est d æqualis angulo ADC , angulus vero GFA æqualis angulo DCA , & angulus DAC est communis duobus triangulis ADC AGF ; erit igitur triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. eadem ratione & triangulum ACB æquiangulum est triangulo AFE . totum igitur parallelogrammum $ABCD$ parallelogrammo EG est æquiangulum. ergo ut AD ad DC , ita e AG ad GF , ut autem DC ad CA , ita GF ad FA , & ut AC ad CB , ita AF ad FE , & præterea ut CB ad BA , ita FE ad EA . itaque quoniam ostensum est ut DC ad CA , ita esse GF ad FA , ut autem f AC ad CB , ita AF ad FE ; erit f ex æquali ut DC ad CB , ita GF ad FE . ergo parallelogrammorum $ABCD$ EG proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos, ac propterea g parallelogrammum $ABCD$ parallelogrammo EG est simile. eadem ratione, & parallelogrammum $ABCD$ simile est parallelogrammo KG . utrumque igitur ipforum $EGHK$ parallelogrammorum, parallelogrammo $ABCD$ est simile. quæ autem eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia h sunt. parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo HK . Quare omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum



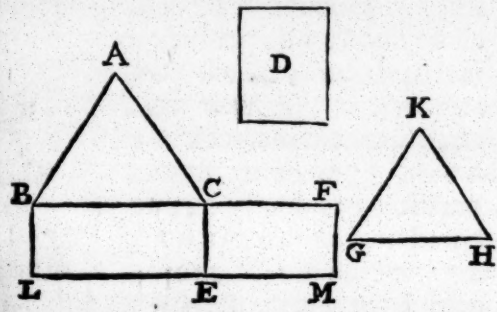
trum sunt parallelogramma, & toti, & inter se sunt similia:
Quod ostendere oportebat.

PROP. XXV. PROBL.

*Dato rectilineo, simile, & alteri dato æquale idem
constituere.*

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile consti-
tuere ABC, cui autem æquale sit D. oportet ipsi ABC si-
mile, & ipsi D æquale idem constituere. Applicetur ^a ad ^a 44. primi.

rectam quidem lineam BC rectilineo ABC æquale paral-
lelogrammum BE. ad rectam vero CE applicetur ^a parallelo-
grammum CM æquale
ipsi D, in angulo FCE,
qui CBL angulo est æ-
qualis. in directum igitur ^b est BC ipsi CF, &
LE ipsi EM. sumantur
inter BC CF media
proportionalis GH, & ^d
ab ipsa GH describatur
rectilineum KGH si-



^b 14. primi.

^c 13. hujus.

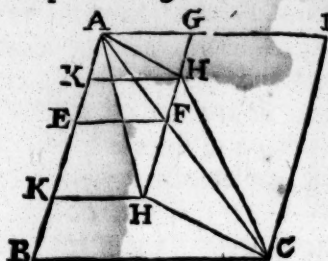
^d 18. hujus.

militer & similiter positum rectilineo ABC. Et quoniam est
ut BC ad GH, ita GH ad CF, si autem tres rectæ lineæ pro-
portionales sint, ut prima ad tertiam ^e, ita est figura quæ ^e 2. Cor. 20.
fit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter de-
scriptam: erit ut BC ad CF, ita ABC rectilineum ad recti-
lineum KGH. sed & ut BC ad CF, ita ^f parallelogrammum ^f 1. hujus.
BE ad EF parallelogrammum, ut ^g igitur rectilineum ABC ^g 11. quinti.
ad rectilineum KGH, ita BE parallelogrammum ad paralle-
logrammum EF. quare ^h permutando ut ABC rectilineum ^h 16. quinti.
ad parallelogrammum BE, ita rectilineum KGH ad EF pa-
rallelogrammum. est autem rectilineum ABC æquale pa-
rallelogrammo BE. æquale igitur est & KGH rectilineum
parallelogrammo EF. sed EF parallelogrammum æquale est
rectilineo D. ergo & rectilineum KGH ipsi D est æquale: est
autem KGH simile rectilineo ABC. Dato igitur rectilineo
ABC simile, & alteri dato D æquale idem constitutum est
KGH. Quod facere oportebat.

PROP. XXVI. THEOR.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti.

A parallelogrammo enim $ABCD$ parallelogrammum AF auferatur, simile ipsi $ABCD$, & similiter positum communemque ipsi angulum habens DAB . dico parallelogrammum $ABCD$ circa eandem esse diametrum parallelogrammo AF . Non enim, sed si fieri potest, sit parallelogrammi BD diameter AHC , & producat GF usque ad H ; ducaturque per H alterutri ipsarum AD BC parallela HK . Quoniam igitur circa eandem diametrum est $ABCD$ parallelogrammum



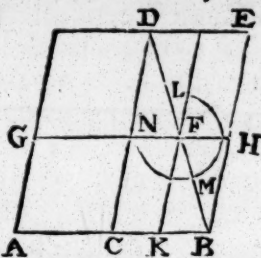
^a 24. hujus. parallelogrammo KG ; & erit ^a parallelogrammum $ABCD$
^b 1. Def. parallelogrammo KG simile. ergo ut ^b DA ad AB , ita GA ad
 hujus. AK . est autem & propter similitudinem parallelogrammo-
^c 11. quinti. rum $ABCD$ EG , ut DA ad AB , ita GA ad AE . & ^c igitur
 ut GA ad AE , ita GA ad AK . quod cum GA ad utramque
^d 9. quinti. ipsarum AK AE eandem proportionem habeat; erit ^d AB
 ipsi AK æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non
 igitur circa eandem diametrum est $ABCD$ parallelogram-
 mum parallelogrammo AH . quare circa eandem diametrum
 erit ipsi AF . Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum
 auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi
 angulum habens, circa eandem diametrum est toti. Quod
 demonstrare oportebat.

PROP. XXVII. THEOR.

Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei quæ à dimidio describitur; maximum est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

Sit recta linea AB ; seceturque bifariam in C ; & ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma CE , simili & similiter posita ei quæ à dimidia ipsius AB descripta est. dico omnium paralle-

parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ipsi CE, maximum esse AD. Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma HK simili, & similiter posita ipsi CE. dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus esse.



Quoniam enim simile est parallelogrammum CE parallelogrammo HK, circa eandem diametrum ^a sunt. ducatur eorum diameter DB, & describatur figura. quoniam igitur CF ^b est æquale ipsi FE, commune apponatur HK. totum igitur CH toti KE est æquale. sed CH est ^c æquale CG, quoniam & recta linea AC ipsi CB. ergo & GC ipsi EK æquale est. commune apponatur CF. totum igitur AF est æquale gnomoni LMN: quare & CE, hoc est AD parallelogrammum parallelogrammo AF est majus. Omnium igitur parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei quæ à dimidia describitur, maximum est quod ad dimidium est applicatum. Quod demonstrare oportebat.

^a 26. hujus.

^b 43. primi.

^c 36. primi.

PROP. XXVIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma quæ similis sit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, & eo quod à dimidia, & eo cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea AB: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, sit C, non majus existens eo quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus: cui autem oportet simile deficere sit D. oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit ipsi D. Secetur AB bifariam in E, & ab ipsa EB describatur ^a simile, & similiter positum ipsi D; quod sit ECFG, & compleatur AG parallelogrammum. itaque AG vel æquale est ipsi C, vel eo majus,

^a 18. hujus.

ob determinationem : & si quidem AG sit æquale C , factum jam erit quod proponebatur : etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma

EF ipsi D simili. si autem non est æquale, erit HE majus quàm C ; atque EF æquale est HE . ergo, & EF quàm C est majus. quo autem EF superat C , ei excessui æquale, ipsi vero D simile & similiter positum,

a 25. hujus.

idem *a* constituatur $KLMN$. sed D est simile EF . quare & KM ipsi EF simile erit. sit igitur recta linea KL homologa ipsi GE , LM vero ipsi GF . & quoniam æquale est EF ipsis C & KM , erit EF ipso KM majus. major *b* igitur est recta linea GE ipsa KL & GF ipsa LM , ponatur

b Cor. 20. hujus.

GX æqualis KL , & GO æqualis LM , & compleatur $XGOP$ parallelogrammum. æquale igitur est & simile XO ipsi KM .

c 21. hujus.

sed KM simile est EF . ergo & *c* XO ipsi EF est simile. circa

d 26. hujus.

candem igitur est *d* diametrum XO ipsi EF . sit ipsorum diameter GPB , & figura describatur. itaque quoniam EF est æquale ipsis C & KM simul, quorum XO est æquale KM , erit reliquus $Y\Phi\psi$ gnomon æqualis reliquo C . & quoniam OR

e 43. primi.

est *e* æquale XS , commune apponatur SR . totum igitur OB

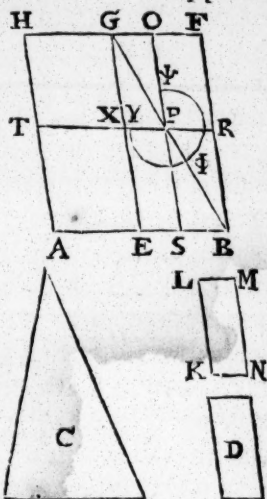
f 36. primi.

toti XB est æquale. sed XB est *f* æquale TE , quoniam & latus AE lateri EB . quare & TE ipsi OB æquale. commune apponatur XS . ergo totum TS est æquale toti gnomoni $Y\Phi\psi$. at $Y\Phi\psi$ gnomon ipsi C ostensus est æqualis : & TS igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB , dato rectilineo C , æquale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogramma SR ipsi D simili, quoniam & SR simile est ipsi GB . Quod facere oportebat.

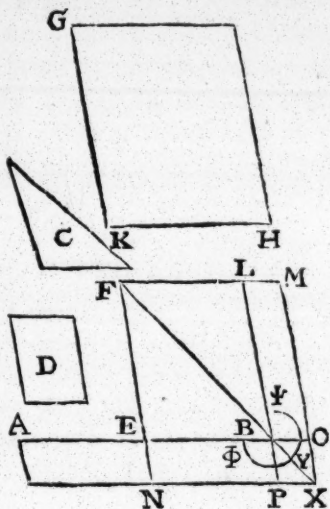
PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datæ.

Sit data recta linea AB , datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipsam AB applicare, sit C ; cui autem oportet simile excedere D . oportet ad rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura



gura parallelogramma simili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipsi D simile, & similiter ^a positum parallelogrammum describatur EL. & utriusque quidem EL & C æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem ^b constituatur GH. simile igitur est GH ipsi EL. sitque KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE & quoniam parallelogrammum GH majus est ipso EL, erit recta linea KH major quàm FL, & KG major quàm FE. producantur FL FE, & ipsi quidem KH æqualis sit FLM, ipsi vero KG æqualis FEN, & compleatur MN parallelogrammum. ergo MN æquale est & simile ipsi GH. sed GH est simile EL: MN igitur ipsi EL simile erit; ac propterea circa eandem diametrum ^d est EL ipsi MN. ducatur ipsorum diameter EX, & figura describatur. itaque quoniam GH ipsi EL & C est æquale, sed GH est æquale MN; erit & MN æquale ipsi EL & C. commune auferatur EL. reliquus igitur $\Phi\Upsilon\Upsilon$ gnomon ipsi C est æqualis. & quoniam AE est æqualis EB, æquale ^e erit & AN parallelogrammum parallelogrammo EP, hoc est ipsi ^f LO. commune apponatur EX. totum igitur AX æquale est gnomoni $\Phi\Upsilon\Upsilon$. sed $\Phi\Upsilon\Upsilon$ gnomon est æqualis C. ergo & AX ipsi C erit æquale. ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatum est AX, excedens figura parallelogramma PO, ipsi D simili, quoniam & ipsi EL simile ^g est OP. Quod fecisse oportebat.



b 25. hujus.

c 21. hujus.

d 26. hujus.

e 36. primi.

f 43. primi.

g 24. hujus.

PROP. XXX. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione secare.

Sit data recta linea terminata AB oportet ipsum AB extrema ac media ratione secare. Describatur ^a ex AB quadratum BC, & ad AC ipsi BC æquale parallelogrammum ^b applicetur CD, excedens ^b figura AD ipsi BC simili. quadratum autem est BC, ergo & AD quadratum erit. & quoniam BC est æquale CD; commune auferatur CE. reliquum igitur BF reliquo AD est æquale. est autem & ipsi æqui-angulum. ergo ipsorum BF AD latera, quæ circum æquales

K 4

angulos

e 14. hujus. angulos, reciproce sunt c proportionalia. ut igitur FE ad

d 34. primi. autem FE æqualis d AC, hoc est ipsi AB; & ED ipsi AE.

quare ut BA ad AE, ita AE ad EB. sed AB major est quam AE. ergo AE quam

e 14. quinti. EB est e major. recta igitur linea AB extrema, ac media ratione secta est in E. & majus ipsius segmentum est AE. Quod facere oportebat.

Aliter. Sit data recta linea AB. oportet ipsam AB extrema ac media ratione secare. Secetur enim AB in C, ita ut
f 11. secundi. rectangulum f quod continetur sub AB BC æquale sit quadrato ex AC. quoniam igitur rectangulum sub AB BC æquale est quadrato ex AC, erit g ut BA ad AC ita AC ad CB.
g 17. hujus. ergo AB recta linea extrema ac media ratione secta est. Quod facere oportebat.



A C B

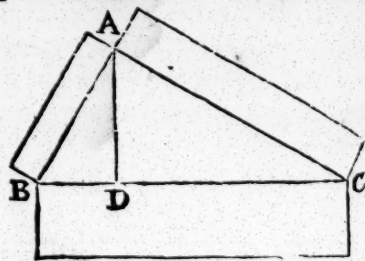
PROP. XXXI. THEOR.

In rectangulis triangulis figura quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. dico figuram, quæ fit ex BC æqualem esse eis quæ ex BA AC fiunt similibus, & similiter descriptis. ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo recto, qui est ad A, ad BC basin perpendicularis ducta est AD, erunt a triacula

a 8. hujus. ABD ADC quæ sunt ad perpendicularem similia toti ABC, & inter se. & quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit ut a CB ad BA, ita BA ad BD. quod cum tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima

b 2. Cor. 20. ad tertiam, ita erit b figura quæ fit ex prima ad eam quæ ex secunda, similem, & similiter descriptam. ut igitur CB ad BD, ita figura quæ fit ex CB ad eam quæ ex BA, similem & similiter descriptam. eadem ratione, & ut BC ad CD, ita figura quæ fit ex BC ad eam quæ ex CA. quare & ut BC ad



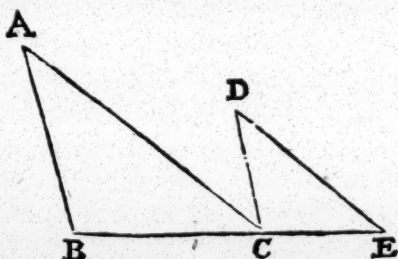
ipsas,

ipsas BD DC , ita ϵ figura quæ ex BC ad eas quæ ex BA AC , ϵ 24. quinti. similes, & similiter descriptas. æqualis autem est BC ipsis BD DC . ergo figura quæ fit ex BC æqualis est eis quæ ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. in rectangulis igitur triangulis, figura quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXXII. THEOR.

Si duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.

Sint duo triangula ABC DCE quæ duo latera BA AC duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, scil. sit sicut BA ad AC , ita CD ad DE ; parallela autem sit AB ipsi DC & AC ipsi DE . dico BC ipsi CE in directum esse. Quoniam enim AB parallela est DC , & in ipsas incidit recta linea AC ; erunt α anguli alterni BAC ACD æquales inter se. eadem ratione, & angulus CDE æqualis est angulo ACD . quare & BAC ipsi CDE est æqualis. & quoniam duo triangula sunt ABC DCE , unum angulum



α 29. primi.

ad A , uni angulo ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod sit ut BA ad AC , ita CD ad DE ; erit β triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum. ergo ABC angulus est æqualis angulo DCE . ostensus autem est & angulus ACD æqualis angulo BAC . totus igitur ACE duobus ABC BAC est æqualis. communis apponatur ACB . ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales sunt. sed BAC ACB CBA anguli duobus rectis ϵ sunt æquales. & anguli igitur ACE ACB duobus rectis æquales erunt. itaque ad quandam rectam lineam AC , & ad punctum in ipsa C , duæ rectæ lineæ BC CE non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipsi CE in directum δ erit. Si igitur duo triangula componantur ad unum angulum quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant

β 6. hujus.

ϵ 32. primi.

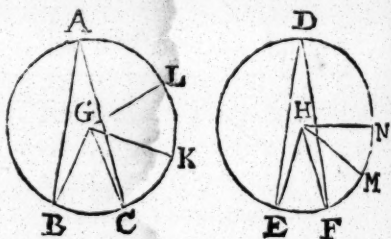
δ 14. primi.

beant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sunt parallelæ; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXIII. THEOR.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ quibus insistant, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant: adhuc autem & sectores, quippe qui ad centra sunt constituti.

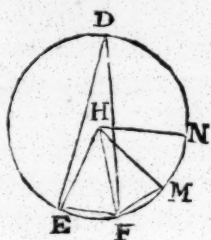
Sint æquales circuli ABC DEF ; & ad centra quidem ipsorum G H sint anguli BGC EHF , ad circumferentias vero anguli BAC EDF . dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita esse & BGC angulum ad angulum EHF , & angulum BAC ad angulum EDF : & adhuc sectorem BGC ad EHF sectorem. ponantur enim circumferentiæ quidem BC æquales quotcumque deinceps CK KL ; circumferentiæ vero EF , rursus æquales quotcumque FM MN . & jungantur GK GL , HM HN . Quoniam igitur circumferentiæ BC CK KL inter se sunt æquales, & anguli



^a 27. tertii. BGC CGK KGL inter se æquales ^a erunt. quotuplex igitur est circumferentia BL circumferentiæ BC , totuplex est & BGL angulus anguli BGC . eadem ratione & quotuplex est circumferentia NE circumferentiæ EF , totuplex & EHN angulus anguli EHF . si vero æqualis est BL circumferentia circumferentiæ EN ; & angulus BGL angulo EHN erit æqualis; & si circumferentia BL major est circumferentia EN , major erit & BGL angulus angulo EHN ; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC EF , & duobus angulis BGC EHF ; sumptæ sunt circumferentiæ quidem BC , & BGC anguli, æque multiplicia, videlicet circumferentia BL & BGL angulus; circumferentiæ vero EN , & EHF anguli, æque multiplicia, nempe circumferentia EN , & angulus EHN . atque ostensum est si circumferentia BL superat circumferentiam EN , & BGL angulum superare angulum EHN ; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem esse. ut ^b igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus BGC ad angulum EHF . sed ut BGC angulus ad angulum EHF , ita angulus

^b Def. 5.
quinti.

angulus BAC ad EDF angulum, uterque enim utriusque est duplex. & ut igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF , ita & angulus BGC ad angulum EHF , & angulus BAC ad EDF angulum. quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem quàm circumferentiæ quibus insunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. dico insuper & ut BC circumferentia ad circumferentiam EF , ita esse sectorem GBC ad HEF sectorem. Jungantur enim $BCCK$, & sumptis in circumferentiis $BCCK$ punctis XO , jungantur & $BXXC CO OK$. itaque quoniam duæ $BG GC$ duabus $CG GK$ æquales sunt, & angulos æquales continent; erit & basis BC basi CK æqualis. æquale igitur est GBC triangulum triangulo GCK . & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CK est æqualis, & reliqua circumferentia quæ complet totum circulum ABC æqualis est reliquæ quæ eundem circulum complet. quare & angulus BXC angulo COK est æqualis. simile igitur est BXC segmentum segmento COK : & sunt in æqualibus rectis lineis $BG GK$. quæ autem in æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta, & inter se æqualia sunt. ergo segmentum BXC est æquale segmento COK . est autem & BGC triangulum triangulo GCK æquale. & totus igitur sector BGC sectori GCK æqualis erit. Eadem ratione & GKL sector utrique ipsorum $GBC GCK$ est æqualis. tres igitur sectores $BGC CGK KGL$ æquales sunt inter se. similiter & sectores $HEF HFM DMN$ inter se sunt æquales. quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiæ BC , totuplex est & GBL sector sectoris GBC . eadem ratione & quotuplex est circumferentia NE circumferentiæ EF , totuplex est & HEN sector sectoris HEF . Sed si circumferentia BL circumferentiæ EN est æqualis, & sector BGL æqualis est sectori EHN ; & si circumferentia BD superat circumferentiam EN , superat & BGL sector sectorem EHN ; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem $BC EF$ circumferentiis, duobus vero sectoribus $GBC EHF$, sumpta sunt æque multiplicia circumferentiæ quidem BC & GBC sectoris, circumferentia BL , & GBL sector. circumferentiæ vero EF , & sectoris HEF , æque multiplicia, circumferentia EN , & HEN sector, atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN , & sectorem BGL superare sectorem EHN ; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem.



e 4. primi.

f 27. tertii.

g 11. Def. tertii.

h 24. tertii.

minorem. est *b* igitur ut *BC* circumferentia ad circumferentiam *EF*, ita sector *GBC* ad *HEF* sectorem. Quod ostendere oportebat.

COROLL.

1. Angulus ad centrum est ad quatuor rectos, ut arcus cui insistit ad totam circumferentiam: nam ut angulus *BAC* ad rectum, ita *BC* arcus ad circuli quadrantem; quare quadruplicando consequentes, erit angulus *BAC* ad quatuor rectos, ut arcus *BC* ad totam circumferentiam.

2. Inæqualium circulorum arcus *IL* *BC* qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra, sive ad peripherias, sunt similes. Nam est *IL* ad totam peripheriam *ILE*, ut angulus *IAL* ad quatuor rectos: est vero ut *IAL* seu *BAC* ad quatuor rectos, ita arcus *BC* ad totam peripheriam *BCF*. quare ut *IL* ad totam peripheriam *ILE*, ita *BC* ad totam peripheriam *BCF*. ac proinde arcus *IL* *BC* sunt similes.



3. Duæ semidiametri *AB* *AC* à concentricis peripheriis arcus auferunt similes *IL* *BC*.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER UNDECIMUS.

DEFINITIONES.

I.

Solidum est, quod longitudinem, latitudinem & crassitudinem habet.

II.

Solidi terminus est superficies.

III.

Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos efficit.

IV.

Planum ad Planum rectum est, cum rectæ lineæ quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno plano ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque à puncto quod perpendicularis in ipso plano effecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adjuncta; est, inquam, angulus acutus insidente linea, & adjuncta comprehensus.

VI.

VI.

Plani ad planum inclinatio est, angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

VII.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

VIII.

Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

X.

Æquales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus est, plurium quàm duarum linearum quæ se mutuo contingunt, nec in eadem sunt superficie, ad omnes lineas inclinatio. Vel solidus angulus est, qui pluribus quàm duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis continetur.

XII.

Pyramis est figura solida planis comprehensa, quæ ab uno plano ad unum punctum constituuntur.

XIII.

Prisma est figura solida quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia & similia, & parallela; alia vero parallelogramma.

XIV.

Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in seipsum rursus revolvitur unde moveri coeperat, circum assumpta figura.

XV.

XV.

Axis autem sphaeræ est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

XVI.

Centum sphaeræ est idem quod & semicirculi.

XVII.

Diameter autem sphaeræ est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à sphaeræ superficie terminata.

XVIII.

Conus est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursus revolvitur, unde moveri coeperat, circum assumpta figura. Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ quæ circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus: si vero minor, amblygonius: si vero major, oxygonius.

XIX.

Axis autem conici est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

XX.

Basis vero conici est circulus qui à circumducta recta linea describitur.

XXI.

Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus revolvitur, unde coeperat moveri, circum assumpta figura.

XXII.

Axis autem cylindri est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII.

Bases vero cylindri sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

XXIV.

Similes conici & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

XXV.

XXV.

Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

Icofaedrum est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

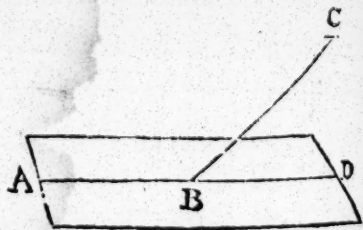
XXX.

Parallelippipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex aduerso parallelæ sunt, contenta.

PROPOSITIO. I. THEOREMA.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, quædam vero in sublimi.

Si enim fieri potest, rectæ lineæ AB pars quidem AB sit in subjecto plano, pars vero BC in sublimi. erit recta linea quædam ipsi AB in directum continuata in subjecto plano. sitque DB . duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD commune segmentum est AB , quod fieri non potest: recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis, quàm uno. Non igitur rectæ lineæ pars quædam est in subjecto plano, quædam vero in sublimi. Quod demonstrare oportebat.



PROP.

PROP. II. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secant, in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit.

Duæ enim rectæ lineæ $ABCD$ se invicem in puncto E secant. dico ipsas $ABCD$ in uno esse plano, & omne triangulum in uno plano consistere. Sumantur enim in ipsis $EBEC$ quævis puncta FG ; junganturque $CBFG$, & FH GK ducantur. dico primum EBC triangulum consistere in uno plano. si enim trianguli EBC pars quædam FHC , vel GBK in subiecto plano est, reliqua vero in alio plano; erit & linearum $EBEC$ pars in subiecto plano, & pars in alio. quod si trianguli ECB pars $FCBG$ sit in subiecto plano, reliqua vero in alio, utrarumque rectarum linearum EC EB quædam pars erit in subiecto plano, quædam vero in alio. quod absurdum esse ^a ostendimus. triangulum igitur EBC in uno est plano. in quo autem plano est BCE triangulum, in hoc est utraque ipsarum EC EB : in quo autem utraque ipsarum EC EB , in hoc ^a sunt & $ABCD$. Ergo rectæ lineæ $ABCD$ in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit. Quod erat demonstrandum.

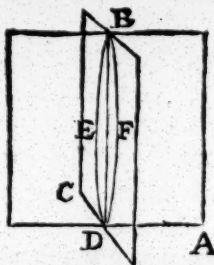


^a i. hujus.

PROP. III. THEOR.

Si duo plana se invicem secant, communis ipsorum sectio recta linea erit.

Duo plana $ABBC$ se invicem secant, communis autem ipsorum sectio sit DB linea. dico lineam DB rectam esse. si enim non ita sit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB ; in plano autem BC recta linea DFB . erunt utique duarum rectarum linearum DEB DFB iidem termini, & ipsæ spatium continebunt, quod est absurdum ^a. non igitur DEB DFB rectæ lineæ sunt. si ^a Axio. 1. ^b militer ostendemus neque aliam quampiam, quæ à puncto D ab B ducitur rectam esse, præter ipsam DB communem scilicet planorum $ABBC$ sectionem. Si igitur duo plana se invicem secant, communis ipsorum sectio recta linea erit. Quod ostendere oportebat.



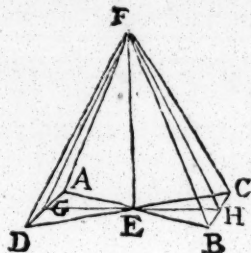
L

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quædam EF duabus rectis lineis AB CD se invicem secantibus in E puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat. dico EF etiam plano per AB CD ducto ad rectos angulos esse. Sumantur rectæ lineæ EA EB CE DE inter se æquales: perque E ducatur recta linea GEH utcunque: & jungantur AD CB; deinde à quovis puncto F ducantur FA FG FD FC FH FB. & quoniam duæ rectæ lineæ AE ED duabus rectis lineis CE EB æquales sunt, &



- a* 15. primi. angulos *a* æquales AED CEB continent, erit *b* AD basis basi
b 4. primi. CB æqualis, & triangulum AED triangulo CEB æquale.
 ergo & angulus DAE æqualis est angulo EBC. est autem
 & angulus AEG *a* æqualis angulo BEH. duo igitur triangula
 sunt AGE BEH, duos angulos duobus angulis æquales habentia,
 alterum alteri, & unum latus AE uni lateri EB æquale quod est
 ad æquales angulos. quare & reliqua latera reliquis lateribus
 æqualia habebunt *c*. ergo GE quidem est æqualis EH;
c 26. primi. AG vero ipsi BH. quod cum AE sit æqualis EB,
 communis autem, & ad rectos angulos FE; erit *b* basis AE
 basi EB æqualis; eadem quoque ratione & CF æqualis erit FD.
 præterea quoniam AD est æqualis CB, & AF ipsi FB, erunt
 duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera alteri; & ostensa
 est basis DF æqualis basi FC. angulus *d* igitur FAD angulo
d 8. primi. FBC est æqualis. rursus ostensa est AC æqualis BH,
 sed & AF ipsi FB est æqualis. duæ igitur FA AG duabus
 FB BH æquales sunt, & angulus FAG æqualis est angulo FBH;
 ut demonstratum fuit, basis igitur GF basi FH est *b* æqualis.
 rursus quoniam GE ostensa est æqualis EH, communis autem EF;
 erunt duæ GE EF æquales duabus HE EF; & basis HF est
 æqualis basi FG. angulus *d* igitur GEF angulo HEF est æqualis,
 & idcirco rectus est uterque angulorum GER HEF. ergo FE
 ad GH utcunque per E ductam rectos efficit angulos. similiter
 ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt,
 & in subiecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad
 planum recta est *e* quando ad omnes rectas lineas ipsam contingentes,

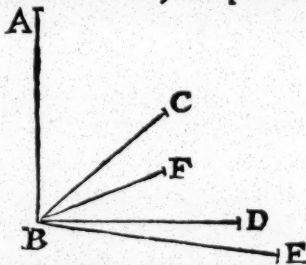
e 3. Def. hujus.

tingentes, & eodem existentes plano rectos efficit angulos. quare FE subiecto plano ad rectos angulos insistit. at subiectum planum est quod per AB CD rectas lineas ducitur. ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit. Quod demonstrare oportebat.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.

Recta linea quædam AB tribus rectis lineis BC BD BE, in contactu B, ad rectos angulos insistat. dico BC BD BE in uno plano esse. Non enim, sed si fieri potest, sint BD BE quidem in subiecto plano; BC vero in sublimi, & planum per AB BC producat. communem utrique sectionem in subiecto plano faciet a rectam lineam; faciat BF. in uno igitur sunt plano per AB BC ducto, tres rectæ lineæ AB BC BF. & quoniam AB utrique ipsarum BD



a 3. hujus.

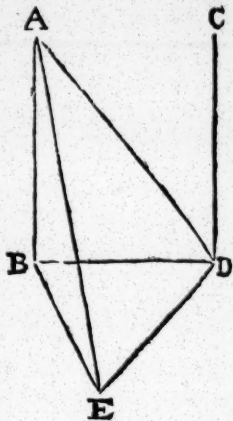
BE ad rectos angulos insistit, & ducto per ipsas DB BE plano b ad rectos angulos erit. planum autem per DB BE est b 4. hujus. subiectum planum. ergo AB ad subiectum planum recta est. quare & ad c omnes rectas lineas ipsam contingentes, quæ c 3. Def. hujus. in eodem plano sunt, rectos faciet angulos; sed ipsam tangit BF in subiecto existens plano. ergo angulus ABF rectus est. ponitur autem & ABC angulus rectus. æqualis igitur est angulus ABF angulo ABC, & in eodem sunt plano; quod fieri non potest. recta igitur linea BC non est in sublimi; quare tres rectæ lineæ BC BD BE in uno sunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. VI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter sese parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD subiecto plano sint ad rectos angulos. dico AB ipsi CD parallelam esse. occurrant enim

enim subiecto plano in punctis B D , jungaturque BD recta linea, cui ad rectos angulos in subiecto plano ducatur DE , & posita DE ipsi AB æquali, jungantur BE AE AD . Quoniam igitur AB recta est ad subiectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subiecto sunt plano, rectos angulos a efficit. contingit autem AB utraque ipsarum BD BE existens in subiecto plano. ergo uterque angulorum ABD ABE rectus est. eadem ratione rectus etiam est uterque ipsorum CDB CDE . & quoniam AB æqualis est ipsi DE , communis autem BD . erunt duæ AB BD duabus ED DB æquales, & rectos angulos continent;

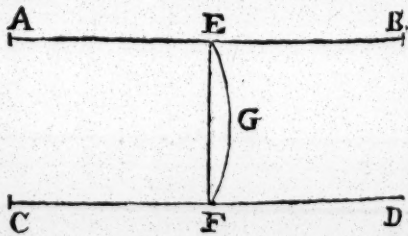


- b 4. primi. basis igitur AD basi BE est b æqualis. rursus quoniam AB est æqualis DE , & AD ipsi BE , duæ AB BE duabus ED DA æquales sunt, & basis ipsarum AE communis; ergo angulus ABE angulo EDA est c æqualis. sed ABE rectus est. rectus igitur & EDA ; & idcirco ED ad DA est perpendicularis. sed & perpendicularis est ad utramque ipsarum BD DC . quare ED tribus rectis lineis BD DA DC in contactu ad rectos insistit angulos. tres igitur rectæ lineæ BD DA DC in uno sunt d plano. in quo autem sunt BD DA , in eo est AB , omne enim triangulum in uno e 3. primi. e est plano. ergo AB BD DC in uno plano sint necesse est; atque est uterque angulorum ABD BDC rectus. parallelæ igitur f 28. primi. f est AB ipsi CD . quare si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se parallelæ erunt. $Q. E. D.$

PROP. VII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in utraque ipsarum qualibet puncta; quæ dicta puncta coniungit recta in eodem erit plano, in quo & parallelæ.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD , & in utraque ipsarum sumantur quælibet puncta E F . dico rectam lineam quæ puncta E F coniungit, in eodem plano esse, in quo sunt parallelæ. non enim, sed si fieri potest, sit in sublimi, ut EGF , & per EGF , planum ducatur quod



- a 3. hujus. in subiecto plano sectionem faciet a rectam lineam; faciat ut

ut EF. ergo duæ rectæ lineæ EGF EF spatium contine-
bunt, quod fieri non potest. non igitur quæ à puncto E ad *b* 10. axio.
F ducitur recta linea in sublimi est plano, quare erit in eo primi.
quod per AB CD parallelas transit. Si igitur duæ rectæ li-
neæ parallelæ sint, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VIII. THEOR.

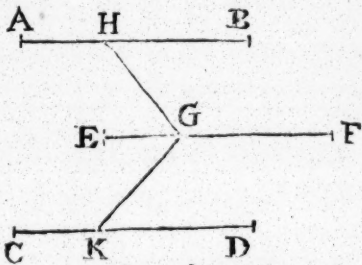
*Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, altera autem ipsa-
rum plano alicui sit ad rectos angulos, & reliqua ei-
dem plano ad rectos angulos erit.*

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD, & altera ipsarum *Vide figuram*
AB subjecto plano sit ad rectos angulos. dico & reliquam *Prop. Sexta.*
CD eidem plano ad rectos angulos esse. occurrant enim AB
CD subjecto plano in punctis B D, & BD jungatur. ergo AB
CD BD in uno sunt *a* plano. ducatur ipsi BD ad rectos angu- *a* 7. hujus.
los in subjecto plano DE: & ponatur DE ipsi AB æqualis:
junganturque BE AE AD. & quoniam AB perpendicularis
est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ
ipsam contingunt suntque in subjecto plano, perpendicu-
laris *b* erit. rectus igitur est uterque angulorum ABD ABE. *b* 3. Def.
quod cum in parallelas rectas lineas AB CD recta incidit *hujus.*
BD, erunt anguli ABD CDB duobus rectis *c* æquales. rectus *c* 29. primi.
autem est ABD. ergo & CDB est rectus; ac propterea CD
perpendicularis est ad BD. & quoniam AB est æqualis DE,
communis autem ED, duæ AB BD duabus ED DB æquales
sunt; & angulus ABD est æqualis angulo EDB, rectus enim
uterque est, basis igitur AD basi BE est *d* æqualis. rursus *d* 4. primi.
quoniam AB æqualis est DE, & BE ipsi AD; erunt duæ
AB BE duabus ED DA æquales, altera alteri; & basis ea-
rum communis AE. quare angulus ABE est *e* æqualis angulo *e* 8. primi.
EDA. rectus autem est ABE. ergo & EDA est rectus, & ED
ad DA perpendicularis. sed & perpendicularis est ad BD.
ergo ED etiam ad planum per BD DA perpendicularis *f* erit, *f* 4. hujus.
& ad omnes rectas lineas quæ in eodem existentes plano
ipsam contingunt, rectos *g* faciet angulos. at in plano per *g* 3. Def.
BD DA est DC, quoniam in plano per BD DA sunt *b* AB *hujus.*
BD: in quo autem sunt AB BD in eodem *i* est ipsa DC. quare *b* 2. hujus.
ED ipsi DC est ad rectos angulos: ideoque CD ad rectos *i* 7. hujus.
angulos est ipsi DE; sed & etiam ipsi DB. ergo CD duabus
rectis lineis DE DB se mutuo secantibus in communi sectio-
ne D ad rectos angulos insistit; ac propterea plano per DE
DB est *e* ad rectos angulos. planum autem per DE DB est
subjectum planum. ergo CD subjecto plano ad rectos angu-
los erit. Quod demonstrare oportebat.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem in quo ipsa plano, etiam inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum AB CD parallelæ ipsi EF , non existentes in eodem, in quo ipsa plano. dico AB ipsi CD parallelam esse. sumatur in EF quodvis punctum G , à quo ipsi EF , in plano quidem per EF AB transeunte, ad rectos angulos ducatur GH ; in plano autem transeunti per EF CD , rursus ducatur ipsi EF ad rectos angulos GK . & quoniam EF ad utramque ipsarum GH GK est perpendicularis, erit EF etiam ad rectos ^a angulos plano per GH GK transeunte. atque est EF ipsi AB parallelæ. ergo & AB plano per HGK ad rectos angulos ^b est. eadem ratione & CD plano per HGK est ad rectos angulos. utraque igitur ipsarum AB CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ ^c erunt inter se. ergo AB ipsi CD est parallelæ. Quod demonstrare oportebat.



^a 4. hujus.

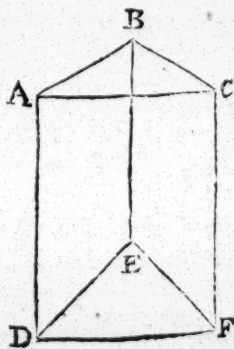
^b 8. hujus.

^c 6. hujus.

PROP. X. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ rectæ lineæ sese contingentes AB BC , duabus rectis lineis DE EF sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. dico angulum ABC angulo DEF æqualem esse. assumantur enim BA BC ED EF inter se æquales: & jungantur AD CF BE AC DF . quoniam igitur BA ipsi ED æqualis est & parallelæ, erit & ^a AD æqualis & parallelæ ipsi BE . eadem ratione & CF ipsi BE æqualis & parallelæ erit. utraque igitur ipsarum AD CF ipsi BE æqualis est & parallelæ. quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem plano; & in-



^a 33. primi.

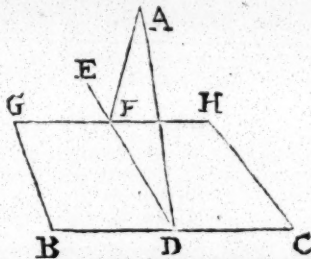
ter

ter se parallelæ *b* erunt. ergo AD parallela est ipsi CF & *b* 9. hujus.
 æqualis. atque ipsas conjungunt AC DF; & AC igitur ipsi
 DF æqualis est & *c* parallela. & quoniam duæ rectæ lineæ AB *c* 33. primi.
 BC duabus DE EF æquales sunt, & basis AC est æqualis
 basi DF; erit *d* angulus ABC angulo DEF æqualis. Si igitur *d* 8. primi.
 duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese
 contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano;
 æquales angulos continebunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XI. PROBL.

*Adato puncto in sublimi, ad subiectum planum, perpen-
dicularem rectam lineam ducere.*

Sit datum quidem punctum in sublimi A, datum autem subjectum planum BH. oportet à puncto A ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. In subjecto plano ducatur quædam recta lineam utcunque BC, & à puncto A ad BC perpendicularis agatur a AD. siquidem igitur AD perpendicularis sit etiam ad subjectum planum; factum jam erit, quod proponebatur: sin minus; ducatur à puncto D ipsi BC, in subjecto plano, ad rectos



a 12. primi.

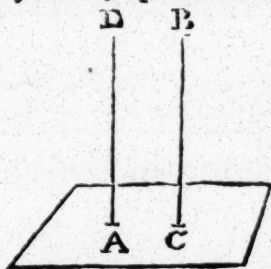
angulos DE: & à puncto A ad DE perpendicularis a du- b 11. primi.
catur AF. denique per F ducatur GH ipsi BC e parallela. c 31. primi.
Quoniam BC utrique ipsarum DA DE est ad rectos angulos,
erit d & BD ad rectos angulos plano per DA DE transeunti. d 4. hujus.
quin ipsi BC parallela est GH; si autem sint duæ rectæ lineæ
parallelæ, quarum una plano alicui sit ad rectos angulos;
& reliqua e eidem plano ad rectos angulos erit. quare & e 8. hujus.
GH plano per ED DA transeunti ad rectos angulos est: ac
propterea ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano ex-
istentes ipsam contingunt est f perpendicularis. contingit f 3. Def.
autem ipsam AF existens in plano per ED DA. ergo GH hujus.
perpendicularis est ad AF. & ob id AF est perpendicularis
ad GH: est autem AF ad DF perpendicularis. ergo AF
perpendicularis est ad utrumque ipsarum HG DE. si autem
recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus, in com-
muni sectione, ad rectos angulos insistat, etiam plano per
ipsas ducto ad rectos angulos d erit. quare AF plano per
ED GH ducto est ad rectos angulos. planum autem per
ED GH est subiectum planum. ergo AF ad subiectum pla-
num est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A, ad

subjectum planum, perpendicularis recta linea ducta est AP .
Quod facere oportebat.

PROP. XII. PROBL.

*Dato plano, à puncto quod in ipso datum est, ad rectos
angulos rectam lineam constituere.*

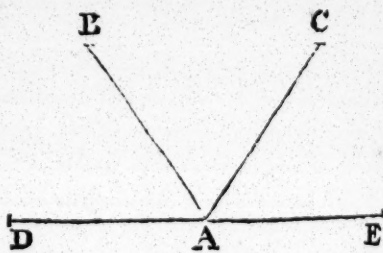
Sit datum quidem planum subjectum, punctum autem
quod in ipso sit A . oportet à
puncto A subjecto plano ad
rectos angulos rectam lineam
constituere. Intelligatur ali-
quod punctum sublime B , à
quo ad subjectum planum a-
gatur a perpendicularis BC ;
 b 31. primi. & per A ipsi BC parallela b
ducatur AD . quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sunt
 AD CB , una autem ipsarum BC subjecto plano est ad rectos
 c 8. hujus. angulos; & reliqua c AD subjecto plano ad rectos angulos
erit. Dato igitur plano à puncto quod in ipso est datum, ad
rectos angulos recta linea constituta est. Quod facere
oportebat.



PROP. XIII. THEOR.

*Dato plano, à puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ
ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte.*

Si enim fieri potest, dato plano, à puncto quod in ipso est
 A , duæ rectæ lineæ AB AC ad rectos angulos constituentur
ex eadem parte: & ducatur
planum per BA AC , quod
faciet sectionem per A in
subjecto plano a rectam line-
 a 5. hujus. am. faciat DAE . ergo rectæ
lineæ AB AC DAE in uno
sunt plano. & quoniam CA
subjecto plano ad rectos an-
 b 3. Def. gulos est, & ad b omnes rectas lineas, quæ in subjecto plano
hujus. existentes ipsam contingunt, rectos faciet angulos. contingit
autem ipsam DAE , quæ est in subjecto plano. angulus igitur
 CAE rectus est. eadem ratione & rectus est BAE . ergo
 c 9. axiom. angulus CAE ipsi BAE est æqualis. & in uno sunt plano,
primi. quod fieri non c potest. Non igitur dato plano, à puncto,
quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos consti-
tuentur ex eadem parte. Quod oportebat demonstrare.



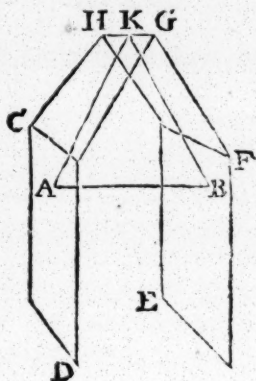
PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Ad quæ plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta quædam linea AB ad utrumque ipsorum planorum CD EF fit perpendicularis. dico ea plana parallela esse. Si enim non ita sit, producta convenient inter se: convenient,

& communem sectionem faciant rectam lineam GH; & in ipsa GH sumpto quovis puncto K, jungatur AK BK. Quoniam igitur AB perpendicularis est ad EF planum; erit & perpendicularis ad ipsam BK rectam lineam in plano EF producto existentem. quare angulus ABK rectus est. eadem ratione & BAK est rectus: ideoque trianguli ABK duo anguli ABK BAK duobus rectis sunt



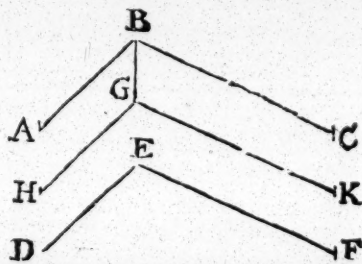
æquales, quod fieri non potest. non igitur plana CD EF ^{a 17. primi.} producta inter se convenient. quare CD EF parallela sint necesse est. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelae, non autem in eodem plano; & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duæ rectæ lineæ sese tangentes AB BC, duabus rectis lineis sese tangentibus DE EF parallelae sint, & non in eodem plano. dico plana quæ per AB BC, DE EF transeunt, si producantur, inter se non

convenire. Ducatur à puncto B ad planum, quod per DE EF transit, perpendicularis BG, quæ plano in puncto G occurrat, & per G ducatur ipsi quidem ED parallela GH; ipsi vero EF



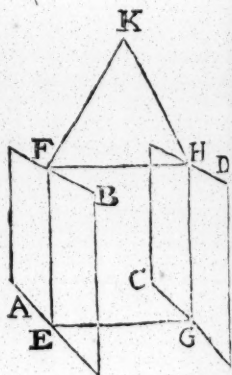
parallela GK. itaque quoniam BG perpendicularis est ad planum per DE EF; & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano, rectos faciet ^{a 3. Def. hujus.} angulos. contingit autem ipsam utraque earum GH GK, quæ sunt in eodem

eodem plano. rectus igitur est uterque angulorum BGH BGK . & quoniam BA parallela est ipsi GH , anguli GBA BGH duobus rectis sunt b æquales. rectus autem est BGH . ergo & GBA rectus erit, ideoque GB ad BA est perpendicularis. eadem ratione & GB est perpendicularis ad BC . cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA BC se invicem secantibus ad rectos angulos insistat; erit BG etiam ad planum per BA BC ductum c perpendicularis. atque est ad planum per DE EF perpendicularis. ergo BG perpendicularis est ad utrumque planorum quæ per AB BC , DE EF transeunt. Ad quæ vero plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela d sunt. parallelum igitur est planum per AB BC plano per DE EF . Quare si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelae, non autem in eodem plano, & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Si dua plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallela erunt.

Duo plana parallela AB CD à plano aliquo $EFGH$ secantur; communes autem ipsorum sectiones sint EF GH . dico EF ipsi GH parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ EF GH inter se convenient, vel ad partes FH , vel ad partes EG . producantur prius ad partes FH , & convenient in K . quoniam igitur EFK est in plano AB , & omnia quæ in EFK sumuntur puncta in eodem plano erunt: unum autem punctum quæ sunt in EFK , est ipsum K punctum. ergo K est in plano AB . eadem ratione & K est in CD plano. ergo plana AB CD producta inter se convenient. non convenient autem, cum parallela ponantur. non igitur EF GH rectæ lineæ productæ convenient ad partes FH . similiter demonstrabimus neque ad partes E G convenire, si producantur. quæ autem neutra ex parte convenient parallelae sunt. ergo EF ipsi GH est parallela. Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secantur, communes ipsorum sectiones parallelae erunt. Quod demonstrare oportebat.

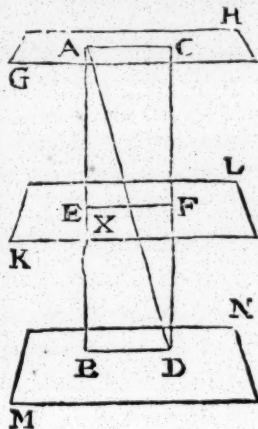


PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ à parallelis secantur planis, in easdem proportionibus secabuntur.

Duæ rectæ lineæ $ABCD$ à parallelis planis $GHKL MN$ secantur in punctis A, E, B, C, F, D . dico ut AE recta linea ad ipsam EB , ita esse CF ad FD . Jungantur enim $ACBD$ AD : & occurrat AD plano KL in puncto X : & EX XF jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela $KL MN$ à plano $EBDX$ secantur, communes ipsorum sectiones EX BD parallelæ ^a sunt. eadem ratione quoniam duo plana parallela $GH KL$ à plano $AXFC$ secantur, communes ipsorum sectiones AC FX sunt parallelæ. & quoniam unilaterum trianguli ABD , videlicet ipsi BD parallela ducta est EX , ut AE ad EB ita ^b erit AX ad XD . rursus quoniam unilaterum trianguli ADC , nempe ipsi AC parallela ducta est XF , erit ut AX ad XD ^b, ita CF ad FD . ostensum autem est ut AX ad XD , ita esse AE ad EB . ut igitur AE ad EB , ita est ^c CF ad FD . Quare si duæ rectæ lineæ à parallelis secantur planis, in easdem proportionibus secabuntur. Quod demonstrare oportebat.



^a 16. hujus.

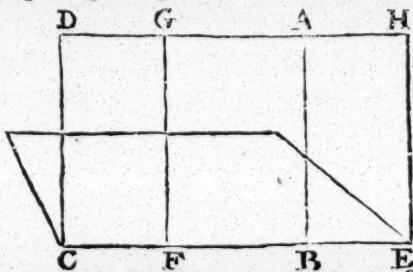
^b 2. sexti.

^c 11. quinti.

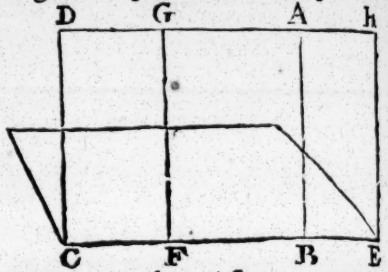
PROP. XVIII. THEOR.

Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta linea quædam AB subjecto plano sit ad rectos angulos. dico & omnia plana quæ per ipsam AB transeunt, subjecto plano ad rectos angulos esse. Producat enim per AB planum DE , sitque plani DE , & subjecti plani communis sectio CE : & sumatur in CE quodvis punctum F ; à quo ipsi CE ad rectos angulos, in DE plano, ducatur FG . quoniam igitur AB ad subjectum planum est perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt & in eodem sunt plano perpendicularis ^a erit. quare ^a 3. Def. hujus.



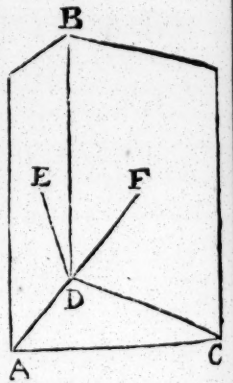
etiam ad CE est perpendicularis. angulus igitur ABF rectus
 ¶ 28. primi. est : sed & GFB est rectus. ergo AB parallela ^b est ipsi FG .
 est autem AB subjecto plano ad rectos angulos. & FG
 igitur eidem plano ad rectos
 ¶ 8. hujus. angulos ^c erit. at planum
 ad planum rectum est, quan-
 do communi planorum sec-
 tioni ad rectos angulos
 ductæ rectæ lineæ in uno
 ¶ 4. Def. hujus. planorum, reliquo plano ad rectos angulos ^d sunt : commu-
 ni vero planorum sectioni CE in uno plano DE ad rectos an-
 gulos ducta FG , ostensa est subjecto plano ad rectos esse
 angulos. ergo planum DF rectum est ad subjectum planum.
 similiter demonstrabuntur & omnia quæ per AB transeunt
 plana subjecto plano recta esse. Si igitur recta linea plano
 alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt
 plana eidem plano ad rectos angulos erunt. Quod oportebat
 demonstrare.



PROP. XIX. THEOR.

*Si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad
 rectos angulos; & communis ipsorum sectio eidem
 plano ad rectos angulos erit.*

Duo plana se invicem secantia AB BC subjecto plano
 sint ad rectos angulos : communis autem ipsorum sectio sit
 BD . dico BD subjecto plano ad rectos angulos esse. Non
 enim, sed si fieri potest; non sit BD ad
 rectos angulos subjecto plano; & à
 puncto D ducatur in plano quidem AB ,
 rectæ lineæ AD ad rectos angulos ipsa
 DE : in plano autem BC ducatur ipsi
 CD ad rectos angulos DF . Et quoniam
 planum AB ad subjectum planum rectum
 est, & communi ipsorum sectioni AD
 ad rectos angulos in plano AB ducta est
 DE , erit ^a DE ad subjectum planum per-
 pendicularis. similiter ostendemus & DF
 perpendicularem esse ad subjectum pla-
 num. quare ab eodem puncto D sub-
 jecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constitutæ
 sunt ex eadem parte, quod fieri non ^b potest. non igitur
 subjecto plano à puncto D ad rectos angulos constituentur
 aliæ rectæ lineæ, præter ipsam DE , communem planorum
 A B B C



¶ 4. Def.
 hujus.

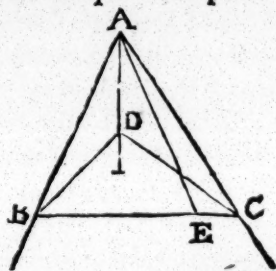
¶ 13. hujus.

ABC sectionem. quare DB subiecto plano est perpendicularis. Ergo si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos; & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XX. THEOR.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti.

Solidus angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. dico angulorum BAC CAD DAB duos quolibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Si enim BAC CAD DAB anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quolibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos.



sin minus, sit major BAC. & ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa A, constituitur a angulo DAB, in plano per BA AC transeunte, æqualis angulus BAE; ponaturque ipsi AD æqualis AE; & per E ducta BEC secet rectas lineas AB AC in punctis BC, & DB DC jungantur. itaque quoniam DA est æqualis AE, communis autem AB, duæ DA AB æquales sunt duabus AE AB; & angulus DAB æqualis est angulo BAE. basis igitur DB basi BE est æqualis. & quoniam duæ DB DC ipsi BC majores sunt, quarum DB æqualis ostensa est ipsi BE; erit reliqua DC quam reliqua EC major. quod cum DA sit æqualis AE, communis autem AC & basis DC major basi EC; erit angulus DAC angulo EAC major. sed ex constructione est DAB angulus æqualis ipsi BAE. quare DAB DAC anguli, angulo BAC majores sunt. similiter demonstrabimus, & si duo quilibet alii sumantur, eos reliquo esse majores. Si igitur solidus angulus tribus angulis planis contineatur; duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXI. THEOR.

Omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

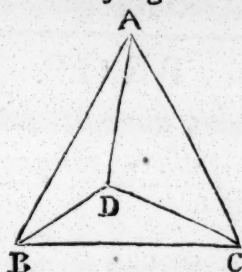
Sit solidus angulus ad A, planis angulis BAC CAD DAB

con-

contentus. dico angulos $BAC CAD DAB$ quatuor rectis esse minores. Sumantur enim in unaquaque ipsarum $AB AC AD$ quævis puncta $B C D$, & $BC CD DB$ jungantur. Quo-

* 20. hujus.

niam igitur solidus angulus ad B , tribus angulis planis continetur $CBA AED CBD$, duo quilibet reliquo majores sunt: anguli igitur $CBA ABD$, angulo CBD sunt majores. eadem ratione, & anguli quidem $BCA ACD$ majores sunt angulo BCD ; anguli vero $CDA ADB$ majores angulo CDB . quare sex anguli $CBA ABD BCA ACD CDA ADB$ tribus angulis $CBD BCD CDB$ sunt majores. sed tres anguli CBD



b 32. primi.

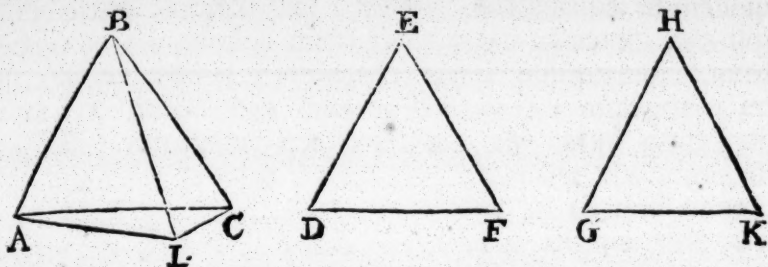
$BDC DCB$ sunt æqualis duobus rectis. sex igitur anguli $CBA ABD BCA ACD CDA ADB$ duobus rectis majores sunt. quod cum singulorum triangulorum $ABC ACD ADB$ tres anguli sint æquales duobus rectis, erunt trium triangulorum novem anguli $CBA ACB BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD$ æqualis sex rectis. quorum sex anguli $ABC BCA ACD CDA ADB DBA$ duobus rectis sunt majores. reliqui igitur $BAC CAD DAB$ tres anguli, qui solidum continent angulum, quatuor rectis minores erunt. Quare omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXII. THEOR.

Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest, ut ex iis quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constitutur.

Sint dati tres anguli plani $ABC DEF GHK$, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti: contineant autem ipsos æquales rectæ lineæ $AB BC, DE EF, GH HK$, & $AC DF GK$ jungantur. dico fieri posse ut ex æqualibus ipsis $AC DF GK$ triangulum constitutur: hoc est duas reliqua majores esse quomodocunque sumptas. Si igitur anguli ad $B E H$ sint æquales, & $AC DF GK$ æquales erunt, & duæ reliqua majores. sin minus, sint inæquales anguli ad $B E H$, & major sit angulus ad B utrovis ipsorum qui sunt ad $E H$. major igitur est & b recta linea AC utraque ipsarum $DF GK$. & manifestum est ipsam AC unā cum altera ipsarum $DF GK$, reliqua esse majorem. dico & $DF GK$ ipsa AC majores

maiores esse. constituatur ϵ ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea B, angulo GHK æqualis angulus ABL, & uni

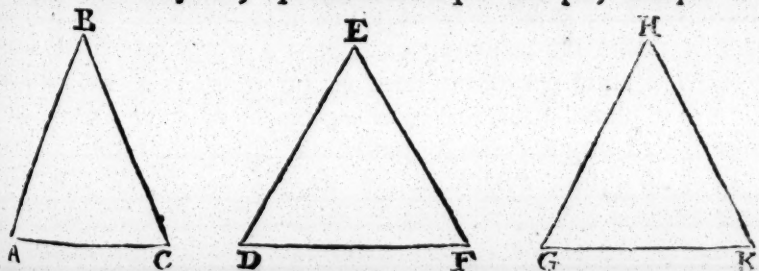


ipsarum AB BC, DE EF, GH HK ponatur æqualis BL, & AL CL jungantur. Quoniam igitur duæ AB BL duabus GH HK æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis AL basi GK æqualis. & quoniam anguli ad E H, angulo ABC majores sunt, quorum angulus GHK est æqualis ipsi ABL; erit reliquus qui ad E, angulo LBC major. quod cum duæ LB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri; & angulus DEF angulo LBC major; basis DF basi LC major d erit. ostensa est autem GK æqualis AL. d 24. primi. ergo DF GK ipsis AL LC sunt majores; sed AL LC majores e sunt ipsa AC. multo igitur DF GK, ipsa AC majores e 20. primi. erunt. quare rectarum linearum AC DF GK duæ reliquæ majores sunt, quomodocunque sumptæ; ac propterea f fieri 22. primi. potest ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIII. PROBL.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere. oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

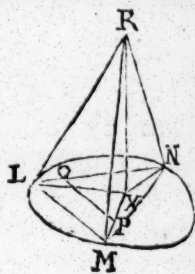
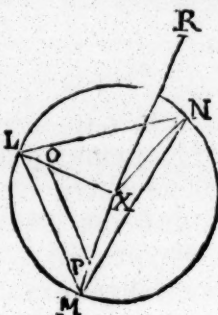
Sint dati tres anguli plano ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, sintque tres



anguli quatuor rectis minores. oportet ex æqualibus ipsis ABC DEF GHK solidum angulum constituere. abscindantur æquales AB BC, DE EF, GH HK; & AC DF GK jungantur. fieri

feri igitur potest ut ex æqualibus ipsis $ACDFGK$ constituatur a triangulum. Itaque b constituatur LMN , ita ut AC quidem sit æqualis LM , DF vero ipsi MN : & præterea GK ipsi LN , & circa LMN triangulum circulus LMN describatur: sumaturque ipsius centrum x , quod vel erit intra triangulum LMN , vel in uno ejus latere, vel extra. sit primo intra: & LX MX NX jungantur. dico AB majorem esse ipsa LX .

si enim non ita sit, vel AB erit æqualis LX , vel ea minor. sit primo æqualis. quoniam igitur AB est æqualis LX , atque est AB ipsi BC æqualis; erit LX æqualis BC , est autem LX æqualis



xm . duæ igitur $ABBC$ duabus $LXxm$ æquales sunt, altera alteri; & AC basis basi LM æqualis ponitur. quare d 8. primi. $\angle$ angulus ABC angulo LXM est æqualis: eadem ratione & angulus quidem DEF est æqualis angulo MXN , angulus vero GHK angulo NXL . tres igitur anguli $ABCDEF$ GHK tribus LXM MXN NXL æquales sunt. sed tres LXM MXN

e 2. Cor. 15. NXL quatuor rectis sunt e æquales. ergo & tres $ABCDEF$ GHK æquales erunt quatuor rectis. atqui ponuntur quatuor

rectis minores, quod est absurdum. non igitur AB ipsi LX est æqualis. dico præterea neque AB minorem esse ipsa LX . si enim fieri potest, sit minor, & ponatur ipsi quidem AB æqualis xo , ipsi vero BC æqualis xp , & op jungatur. quoniam igitur AB est æqualis BC , & xo ipsi xp æqualis erit. ergo & reliqua OL reliquæ PM est æqualis; ac propterea

f 2. sexti.

g 4. sexti.

LM parallela f est ipsi op ; & LMx triangulum triangulo OPx æquiangulum. est g igitur ut XL ad LM , ita xo ad op ; & permutando ut XL ad xo , ita LM ad op . major autem est LX , quam xo . ergo & LM quam op est major. sed LM posita est æqualis AC . & AC igitur quam op major erit. itaque quoniam duæ rectæ lineæ $ABBC$ duabus

h 25. primi.

$oxxp$ æquales sunt, & basis AC major basi op ; erit i angulus ABC angulo oxp major. similiter demonstrabimus & DEF angulum majorem esse angulo MXN , & angulum GHK angulo NXL ; tres igitur anguli $ABCDEF$ GHK tribus LXM MXN NXL sunt majores. at anguli $ABCDEF$ GHK quatuor rectis minores ponuntur. multo igitur anguli

i 2. Cor. 15.

primi.

LXM MXN NXL minores erunt quatuor rectis. sed & i æquales. quod est absurdum. non igitur AB minor est, quam

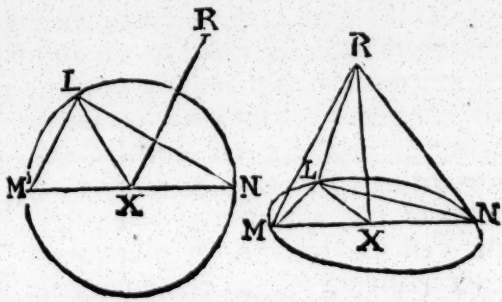
LX .

LX. ostensum autem est neque esse æqualem. ergo major sit
 necesse est. constituatur k à puncto x circuli LMN plano ad k 12. hujus.
 rectos angulos XR . & excessui quo quadratum ex AB su-
 perat quadratum ex LX , ponatur æquale quadratum quod
 fit ex RX , & RL RM RN jungantur. quoniam igitur RX
 perpendicularis est ad planum DMN circuli, & ad unam-
 quamque ipsarum LX MX NX erit l perpendicularis. & l 3. Def.
 quoniam LX est æqualis XM , communis autem & ad rectos $hujus$.
 angulos XR , erit basis LR æqualis m basi RM . eadem ratione m 4. primi.
 & RN utrique ipsarum RL RM est æqualis. tres igitur
 rectæ lineæ RL RM RN inter se æquales sunt. & quoniam
 quadratum XR ponitur æquale excessui, quo quadratum ex
 AB superat quadratum ex LX ; erit quadratum ex AB qua-
 dratis ex LX XR æquale. quadratis autem ex LX XR
 æquale est n quadratum ex RL ; rectus enim angulus est n 47. primi.
 LXR . ergo quadratum ex AB quadratum ex RL æquale erit;
 ideoque AB ipsi RL est æqualis. sed ipsi quidem AB æqua-
 lis est unaquæque ipsarum BC DE EF GH HK : ipsi vero
 RL æqualis utraque ipsarum RM RN . unaquæque igitur
 ipsarum AB BC DE EF GH HK unicuique ipsarum RL RM
 RN est æqualis. quod cum duæ RL RM duabus AB BC
 æquales sint, & basis LM ponatur æqualis basi AC : erit
 o angulus LRM æqualis angulo ABC . eadem ratione & an- o 8. primi.
 gulus quidem MRN angulo DEF , angulus autem LRN an-
 gulo GHK est æqualis. ex tribus igitur angulis planis LRM
 MRN LRN , qui æquales sunt tribus datis ABC DEF GHK
 solidus angulus constitutus est ad R .

Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, vide-
 licet in MN , quod sit x , & XL jungatur. dico rursus AB
 majorem esse ipsa LX .

si enim non ita sit,
 vel AB est æqualis LX
 vel ipsa minor. sit
 primo æqualis. duæ
 igitur AB BC , hoc
 est DE EF duabus MX
 XL , hoc est ipsi MN
 æquales sunt. sed MN
 ponitur æqualis DF .

ergo DE EF ipsi DF sunt æquales. quod fieri non potest p 20. primi.
 non igitur AB est æqualis LX . similiter neque minor. multo
 enim magis id quod fieri non potest sequeretur. ergo AB
 ipsa LX major est. & similiter si excessui quo quadratum ex
 AB superat quadratum ex LX æquale ponatur quadratum



M

ex

ex rx , & ipsa rx circuli plano ad rectos angulos constituitur, fiet problema.

Sed sit centrum circuli extra triangulum LMN , quod sit x , & Lx Mx Nx jungantur. dico & sic AB ipsa Lx majorem esse. Si enim non ita sit, vel æqualis est, vel minor. sit primo æqualis. ergo duæ AB BC duabus Mx Nx æquales sunt, altera alteri; & basis AC est æqualis basi ML , angulus igitur ABC æqualis est angulo MXL . eadem ratione &

GHK angulus ipsi LxN est æqualis; ac propterea totus MXN æqualis duobus ABC GHK . sed & anguli

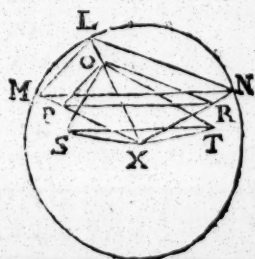
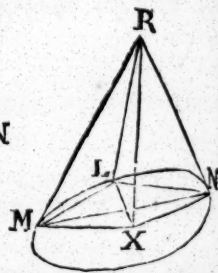
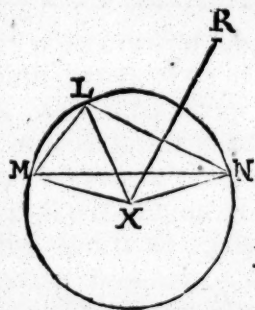
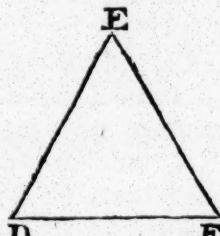
ABC GHK angulo DEF majores sunt. & angulus igitur

DEF est major. at quoniam duæ DE EF duabus Mx Nx æquales sunt, & basis DF æqualis basi MN , erit MXN angulus angulo DEF æqualis. ostensus autem est major, quod est absurdum. non igitur AB est æ-

qualis Lx : deinceps vero ostendemus neque minorem esse. quare major necessario erit. & si rursus circuli plano ad rectos angulos constituamus xR , & ipsam æqualem ponamus lateri quadrati ejus, quo quadratum ex AB superat quadratum ex Lx , problema constituetur. Dico vero neque minorem esse AB ipsa Lx . si enim fieri potest, sit minor; & ipsi quidem AB æqualis ponatur xO , ipsi vero BC æqua-

lis xP , & OP jungatur. quoniam igitur AB ipsi BC est æqualis, erit xP æqualis xP . ergo & reliqua OL reliquæ PM æqualis. parallela igitur est LM ipsi PO , & triangulum LMX triangulo PxO æquiangulum est quare ut Lx ad LM , ita xO ad OP : & permutando ut Lx ad xO , ita LM ad OP . major autem est Lx quam xO . ergo LM quam OP est major.

sed LM est æqualis AC . & AC igitur quam OP major e-



q 2. sexti.

r 4. sexti.

rit.
æqu
san
mat
oste
tuat
quic
æqu
jun
ox
erit
&
os
erit
erg
EF
ST
est
ang
pot

Si
A
S
FB
&
lela
nes
quo
BF
com
para
tur
aute
CD.
mun
strat
para
ralle
AB
ralle
con
Et q

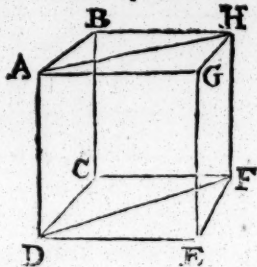
rit. itaque quoniam duæ $AB BC$ duabus $OX XP$ sunt æquales altera alteri; & basis AC major est basi OP ; erit $\angle ABC$ angulo OPX major. similiter & si XR sumatur æqualis utrivis ipsarum $OX XP$, & jungatur OR , ostendemus angulum GHK angulo ORX majorem. constituatur ad rectam lineam LX , & punctum in ipsa X angulo quidem ABC æqualis angulus LXS , angulo autem GHK æqualis LXT , & ponatur utraque $XS XT$ ipsi OX æqualis: junganturque $OS OT ST$. & quoniam duæ $AB BC$ duabus $OX XS$ æquales sunt, & angulus ABC æqualis angulo $OX S$ erit basis AC , hoc est LM , basi OS æqualis. eadem ratione, & LN est æqualis ipsi OT . quod cum duæ $ML LN$ duabus $OS OT$ sint æquales, & angulus MLN major angulo SOT ; erit & basis MN basi ST major. sed MN est æqualis DF . ergo & DF quam ST major erit. quoniam igitur duæ $DE EF$ duabus $SX XT$ æquales sunt, & basis DF major basi ST ; erit angulus DEF angulo SXT major. æqualis autem est angulus SXT angulis $ABC GHK$. ergo DEF angulus angulis $ABC GHK$ major est: sed & minor. Quod fieri non potest. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIV. THEOR.

Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma erunt.

Solidum enim $CDGH$ parallelis planis $AC GF BG CE$ $FBAE$ contineatur. dico opposita ejus plana, & æqualia, & parallelogramma esse. Quoniam enim duo plana parallela $BG CE$, à plano AC secantur, communes ipsorum sectiones α parallelæ sunt: ergo AB ipsi CD est parallela. rursus α 16. hujus.

quoniam duo plana parallela $BF AE$ secantur à plano AC , communes ipsorum sectiones parallelæ α sunt: parallela igitur est AD ipsi BC . ostensa autem est & AB parallela CD . ergo AC parallelogrammum erit. similiter demonstrabimus, & unumquodque ipsorum $CE FG GB BF AE$ parallelogrammum esse. jungantur $AH DF$. & quoniam parallela est AB quidem ipsi DC ; BH vero ipsi CF , erunt $AB BH$ sese tangentes, duabus $DC CB$ sese tangentibus parallelæ, & non in eodem plano: quare æquales β angulos β 10. hujus. continebunt. angulus igitur ABH angulo DCF est æqualis. Et quoniam duæ $AB BH$ duabus $DC CF$ æquales ϵ sunt, & ϵ 34. primi. angulus



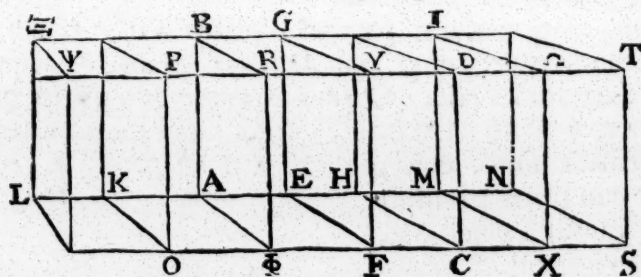
d 4. primi. angulus ABH æqualis angulo DCF , erit *d* basis AH basi DF æqualis: & ABH triangulum æquale triangulo DCF . quod
e 4.1. primi. cum ipsius quidem ABH trianguli duplum *e* fit BG parallelogrammum: ipsius vero DCF trianguli duplum parallelogrammum CE : erit BG parallelogrammum æquale parallelogrammo CE . similiter demonstrabimus & AC parallelogrammum parallelogrammo GF , & parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale esse. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma sunt. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Ex jam demonstratis constat, si solidum parallelis contineatur planis, opposita ipsius plana, & æqualia esse, & similia, quippe quæ & singulos angulos æquales, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

PROP. XXV. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidum enim parallelepipedum $ABCD$ plano YE secetur, oppositis planis RA DH parallelo. dico ut EFA basis ad basim EHC , ita esse $ABFY$ solidum ad solidum $EGCD$. Producat enim AH ex utraque parte: & ponantur ipsi



Quidem EH æquales quotcunque HM MN ; ipsi vero AE æquales quotcunque AK KL , & compleantur parallelogramma $LOK\Phi$ $HXMS$, & solida $LPKR$ $H\Omega$ MT . quoniam igitur æquales inter se sunt LK KA AE rectæ lineæ; erunt & parallelogramma $LOK\Phi$ AF inter se *a* æqualia: itemque æqualia inter se parallelogramma $K\Xi$ $KBAG$, & adhuc
a 1. sexti. parallelogramma $L\Upsilon$ KP AR inter se *b* æqualia; opposita enim sunt. eadem ratione & parallelogramma EC $HXMS$ æqualia inter se sunt; itemque parallelogramma HG HI IN inter se æqualia: & insuper parallelogramma DH $M\Omega$ NT . tria igitur plana solidi LP æqualia sunt tribus planis solidi
b 24. hujus. KR , atque etiam solidi AY , *c* similia quoque sunt: sed tria
c 29. primi. tribus

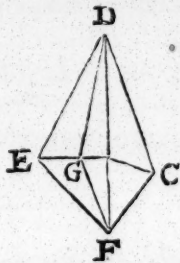
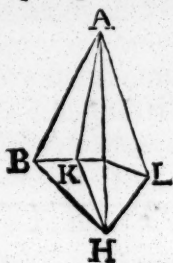
tribus oppositis ^d sunt similia & æqualia. ergo tria solida ^d Cor. antecedent. ^e 10. Def. hujus. LP KR AY inter se æqualia erunt. eadem ratione & tria solida ED H Ω MT sunt æqualia inter se. quotuplex igitur est basis LF ipsius AF basis, totuplex est & LY solidum solidi AY. eadem ratione quotuplex est NF basis ipsius basis HF, totuplex est & solidum NY ipsius ED solidi: & si basis LF est æqualis basi NF, & solidum LY solido NY æquale erit; & si basis LF superat NF basim, & LY solidum NY superabit; & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus AF FH, & duobus solidis AY ED; sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem AF, & AY solidi, videlicet basis LF, & solidum LY: basis vero HF, & ED solidi, nempe basis NF, & solidum NY. & demonstratum est si basis LF superat basim NF, & LY solidum solidum NT superare; & si æqualis æquale; & si minor minus. est igitur ^f ut AF basis ad basim FH, ita AY solidum ^f 5. Def. quinti. ad solidum ED. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis planis parallelis; erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXVI. PROBL.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem solidum angulum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipsa punctum A, & datus solidus angulus ad D qui EDC EDF FDC angulis planis continetur. oportet ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D æqualem solidum angulum constituere.

Sumatur in linea DF quodvis punctum F, à quo ad planum per ED DC transiens ducatur ^a perpendicularis FG, & plano in puncto G occurrat; jungaturque DG, & ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem EDC æqualis angulus ^b constituatur BAL; angulo autem EDG constituatur æqualis BAK. deinde ipsi DG ponatur æqualis AK, & à puncto K plano per BAL ad rectos angulos ^c erigatur HK; ponaturque ipsi GF æqualis KH, & HA jungatur. dico angulum solidum ad A qui angulis BAL BAH HAL continetur, æqualem esse solido angulo ad D; angulis EDC EDF FDC contento. sumantur



^a 11. hujus.

^b 23. primi.

^c 12. hujus.

d 3. Def.
hujus.

e 4. primi.

f 8. primi.

mantur enim æquales rectæ lineæ $ABDE$, & jungantur HB KB FE GE . quoniam igitur FG perpendicularis est ad sub-
jectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam con-
tingunt, suntque in subiecto plano, rectos faciet d angulos.
uterque igitur angulorum FGD FGE rectus est. eadem ra-
tione, & uterque ipsorum HKA HKB est rectus. & quo-
niam duæ KA AB duabus

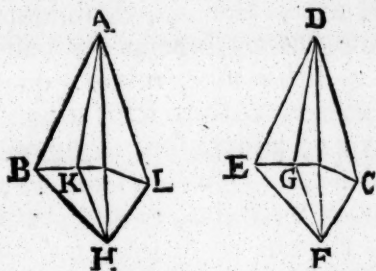
GD DE æquales sunt altera
alteri, & angulos æquales
continent; erit e basis BK
basis EG æqualis. est autem
& KH æqualis GF , atque
angulos rectos continent.
æqualis e igitur erit HB ipsi

FE . rursus quoniam duæ AK KH duabus DG GF æquales
sunt, & rectos continent angulos; erit basis AH basis DF
æqualis: estque AB æqualis DE . duæ igitur HA AB dua-
bus FD DE sunt æquales; & basis HB est æqualis basi FE .
ergo angulus f BAH angulo EDF æqualis erit. eadem ra-
tione, & angulus HAL angulo FDC est æqualis, quando-
quidem si assumamus æquales AL DC , & jungamus KL HL
 GC FC , quoniam totus BAL est æqualis toti EDC , quorum
 BAK ipsi EDG ponitur æqualis; erit reliquus KAL æqua-
lis reliquo GDC . & quoniam duæ KA AL duabus GD DC
æquales sunt, & angulos æquales continent; basis KL basi
 GC æqualis erit. est autem & KH æqualis GF , duæ igitur
 LK KH , duabus CG GF sunt æquales; angulosque rectos
continent: ergo basis HL æqualis est basi FC . rursus quo-
niam duæ HA AL , duabus FD DC æquales sunt, & basis HL
æqualis basi FB ; erit angulus HAL f æqualis angulo FDC . at-
que factus est angulus BAL angulo EDC æqualis. Ad datam
igitur rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum, dato an-
gulo solido æqualis angulus solidus constitutus est. Quod
facere oportebat.

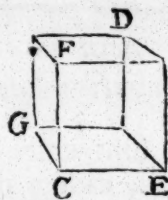
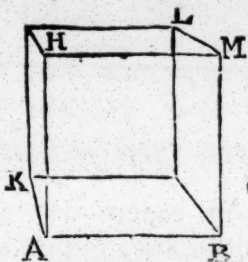
PROP. XXVII. PROBL.

*Ad datam rectam lineam dato solido parallelepipedo si-
mile, & similiter positum solidum parallelepipedum
describere.*

Sit recta quidam linea AB ; datum vero solidum parallele-
pipedum CD . oportet ad datam rectam lineam AB dato solido
parallelepipedo CD simile, & similiter positum solidum paral-
lelepipedum describere. Constituatur ad rectam lineam AB ,
&



& ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad C æqualis a angulus, qui angulis BAH HAK KAB contineatur, ita a 26. hujus. ut angulus quidem BAH æqualis sit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus HAK angulo GCF, & fiat b ut EC ad CG, ita BA ad AK, ut autem GC ad CF, ita KA ad AH. ergo ex æquali ut EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH, & AL solidum. quoniam igitur est ut EC ad CG, ita BA ad AK, nempe, circa æquales angulos ECG BAK latera sunt proportionalia; erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE simile. eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est parallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogramma solidi AL tribus parallelogrammis solidi CD similia sunt: sed tria tribus oppositis sunt c æqualia, & similia. c Cor. 24. ergo totum AL solidum toti solido CD simile erit. Ad datam hujus. igitur rectam lineam AB dato solido parallelepipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelepipedum AL descriptum est. Quod facere oportebat.



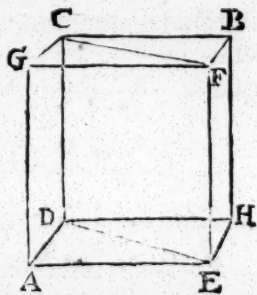
b 12. sexti.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.

Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales oppositorum planorum, videlicet CF DE. dico solidum AB à plano CDEF bifariam secari.

Quoniam enim æquale a est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; est autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale b, oppositum enim est; & parallelogrammum GE æquale parallelogrammo CH; erit prisma contentum duobus triangulis CGF ADE, & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CFB DEH, & tribus parallelogrammis CH & BE CE; etenim planis, & numero & magnitudine æqualibus continentur. ergo totum AB solidum



a 34. primi.

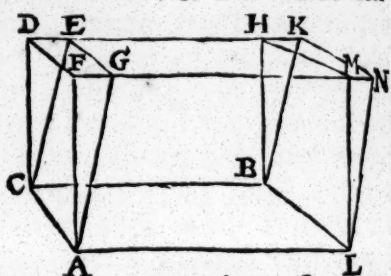
b 24. hujus.

dum à plano CDEF bifariam secatur. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes lineæ sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN, eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH BK sint in eisdem rectis lineis FNDK. dico solidum CM solido CN æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est utrumque ipsorum CH CK; erit CB, utrique ipsarum DH EK ^a æqualis, ergo & DH est æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE æqualis est reliquæ HK. quare & ^b DEC triangulum est æquale triangulo HKB. parallelogrammum autem DG est æquale parallelogrammo HN. eadem ratione & AFG triangulum æquale est triangulo LMN. est autem parallelogrammum CF parallelogrammo ^c BM, & parallelogrammum CG parallelogrammo BN æquale: opposita enim sunt. ergo & prisma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur solidum, cuius basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi GEHM. ergo totum CM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo CN est æquale. Solida igitur parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XXX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in iisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

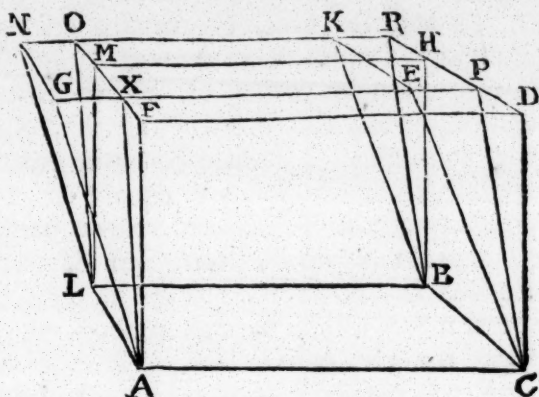
Sint in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE

BH

onfrare

Et ea-
eisdem

eda CM
LN CD
co foli-



æquale
æquale
gulum
mum
G pa-
go &
tribus
quod
ammis
n, cu-
autem
n toti
paralle-
udine,
unt æ-

3 ea-
idem

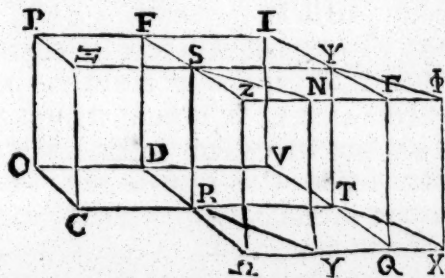
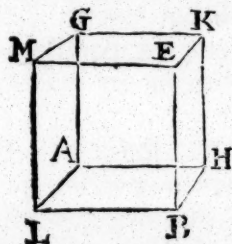
N &
D CE
BH

lineam RT , & ad punctum in ipsa R , angulo ALB æqualis α angulus TRY . & ponatur ipsi quidem AL æqualis α 23. primi.

RT, ipsi vero LB æqualis RY, & ad punctum Y ipsi RT parallela ducatur YX, compleaturque parallelogrammum RX, & Ψ Y solidum. quoniam igitur duæ TR RY duabus AL LB æquales sunt, & angulos continent æquales; erit parallelogrammum RX æquale & simile parallelogrammo HL: & quoniam rursus AL est æqualis RT, & LM ipsi RS, angulosque æquales continent, parallelogrammum R Ψ parallelogrammo AM æquale & simile erit. eadem ratione LE parallelogrammum ipsi SY æquale est & simile. tria igitur parallelogramma solidi AE tribus parallelogrammis solidi Ψ Y æqualia & similia sunt. sed & tria tribus opposita & æqualia sunt & similia. totum igitur AE solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo Ψ Y est æquale. producantur DR XY, convenientque inter se in puncto Ω , & per T ipsi D Ω parallela ducatur TQ, & producantur TQ OD, & convenient in V, compleaturque solida $\Omega\Psi$ RI. solidum igitur $\Psi\Omega$ cujus basis est R Ψ parallelogrammum, oppositum autem ipsi $\Omega\Gamma$, est æquale solido Ψ Y, cujus basis est R Ψ parallelogrammum, & oppositum ipsi Y Φ , in eadem enim

Ψ Cor. 24.
hujus.

e 29. hujus.

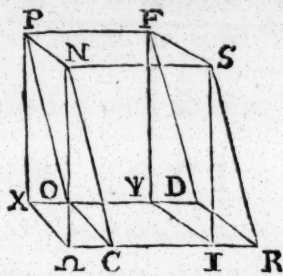
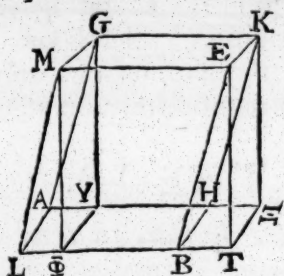


sunt basi R Ψ , & eadem altitudine, & eorum stantes R Ω RY TQ TX SZ SN $\Psi\Gamma$ $\Psi\Phi$ in eisdem sunt rectis lineis Ω X Z Φ . sed solidum Ψ Y æquale est solido AE. ergo & $\Psi\Omega$ solido AE est æquale. præterea quoniam parallelogrammum RYXT est æquale parallelogrammo Ω T, etenim in eadem est basi RT, & in eisdem parallelis RT Ω X. & parallelogrammum RYXT parallelogrammo CD est æquale, quoniam & ipsi AB est æquale; parallelogrammum Ω T æquale est parallelogrammo CD: aliud autem est parallelogrammum DT. est igitur ut CD basis ad basim DT, ita Ω T ad ipsam DT. & quoniam solidum parallelepipedum CI secatur plano RF planis oppositis parallelo; erit ut CD basis ad basim DT, ita solidum CF ad RI solidum. eadem ratione quoniam solidum parallelepipedum Ω I secatur plano R Ψ oppositis planis parallelo, ut Ω T basis ad basim DT, ita erit solidum $\Omega\Psi$ ad RI solidum. sed ut CD basis ad basim DT, ita basis Ω T ad ipsam TD. ut igitur solidum CF ad RI solidum ita solidum

d 25. hujus.

solidum $\Omega\psi$ ad solidum RI . quod cum utrumque solidorum $CF\Omega\psi$ ad solidum RI eandem habet proportionem, solidum CF solido $\Omega\psi$ est æquale. solidum autem $\Omega\psi$ ostensum est æquale solido AE . ergo & AE ipsi CF æquale erit.

e 9. quinti.



Sed non sint stantes $AG\ HK\ BE\ LM\ CN\ OP\ DF\ RS$ ad rectos angulos ipsis $AB\ CD$ basibus. dico rursus solidum AE æquale esse solido CF . ducantur f à punctis $KE\ GM\ PF\ NS$ ad subiectum planum perpendiculares $KZ\ ET\ GY\ M\Phi$, $SI\ FY\ N\Omega\ PX$, & plano in punctis $Z\ T\ Y\ \Phi$, & $X\ \Omega\ I$ occurrant, & jungantur $ZT\ Y\Phi\ ZY\ T\Phi\ X\psi\ X\Omega\ \Omega I\ \psi I$. æquale igitur est $K\Phi$ solidum solido PI ; in æqualibus enim sunt basibus $KM\ PS$, & eadem altitudine, quorum stantes ad rectos angulos sunt basibus. sed $K\Phi$ solidum solido AE est æquale: solidum vero PI æquale g solido CF . si quidem in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis. ergo & solidum AE solido CF æquale erit. Solida igitur parallelepipeda quæ in æqualibus sunt basibus & eadem altitudine, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

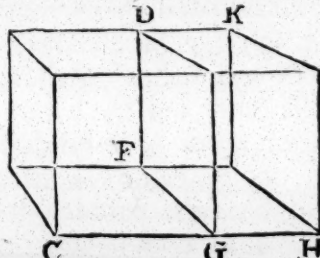
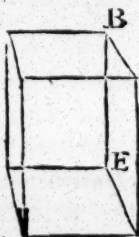
f 11. hujus.

g 29. hujus.

PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint solida parallelepipeda $AB\ CD$, quæ eandem altitudinem habeant. dico inter se esse ut bases; hoc est ut AE basis ad basim CF ita solidum AB ad CD solidum. applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammum AE æquale FH , & à basi FH eadem A



altitudine ipsi CD solidum parallelepipedum GK compleatur. solidum igitur AB solido GK est æquale; in æqualibus enim

a 31. hujus.

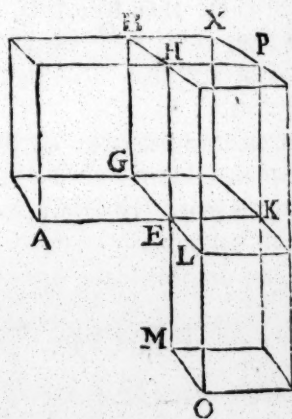
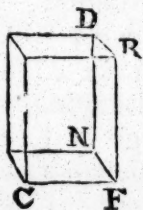
enim sunt basibus $A E F H$, & eadem altitudine. itaque quoniam solidum parallelepipedum $C K$ plano $D G$ fecatur oppositis
 25. hujus. planis parallelo; erit ut $^b H F$ basis ad basim $F C$, ita solidum $H D$ ad $D C$ solidum; atque est basis quidem $F H$ basi $A E$ æqualis, solidum vero $G K$ æquale solido $A B$. est igitur & ut $A E$ basis ad basim $F C$, ita solidum $A B$ ad solidum $C D$. Quare solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXIII. THEOR.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicata proportionem homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda $A B C D$. latus autem $A B$ homologum sit lateri $C F$. Dico solidum $A B$ ad $C D$ solidum triplicatam proportionem habere ejus, quam habet $A B$ ad $C F$. producantur enim $E K$ $E L$ $E M$ in directum ipsi $A E$ $G E$ $H E$: & ipsi quidem $C F$ æqualis ponatur $E K$, ipsi vero $F N$ æqualis $E L$;

& adhuc ipsi $F R$ æqualis $E M$, & $K L$ parallelogrammum, & $K O$ solidum compleatur. quoniam igitur duæ $K E$ $E L$ duabus $C F$ $F N$ æquales sunt: sed & angulus $K E L$ angulo $C F N$ est æqualis; quia &



angulus $A E G$ ipsi $C F N$ ob similitudinem solidorum $A B C D$: erit & $K L$ parallelogrammum simile & æquale parallelogrammo $C N$. eadem ratione, & parallelogrammum $K M$ æquale est & simile parallelogrammo $C R$, & adhuc parallelogrammum $O E$ ipsi $D F$ parallelogrammo. tria igitur parallelogramma solidi $K O$ tribus parallelogrammis $C D$ solidi æqualia & similia sunt. sed tria tribus oppositis æqualia sunt & similia. totum igitur $K O$ solidum æquale est & simile toti solido $C D$. compleatur $G K$ parallelogrammum; & à basibus quidem $G K$ $K L$ parallelogrammis, altitudine vero eadem ipsi $A B$, solida compleantur $E X L P$. & quoniam ob similitudinem solidorum $A B C D$ est ut $A E$ ad $C F$, ita $E G$ ad $F N$; & $E H$ ad $F R$: æqualis autem $F C$ ipsi $E K$, & $F N$ ipsi $E L$, &

^a Cor. 24.
hujus.

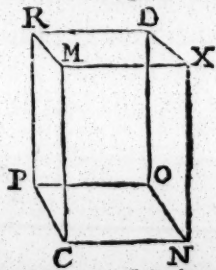
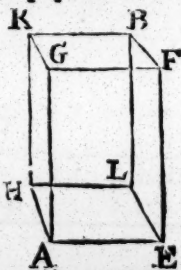
FR ipsi EM. erit ut AE ad EK, ita GE ad EL, & HE ad EM. sed ut AE quidem ad EK, ^b ita AG parallelogrammum ^b 1. sexti. ad parallelogrammum GK: ut autem GE ad EL, ita GK ad KL: & ut ^b HE ad EM, ita PE ad KM. & ut igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK ad KL, & PE ad KM. sed ut AG quidem ad GK, ita ^c AB solidum ^c 32. hujus. ad solidum EX: ut autem GK ad KL, ita solidum EX ad PL solidum: & ut PE ad KM, ita PL solidum ad solidum KO. & ut igitur solidum AB ad solidum EX, ita ^d EX ad PL, ^d 11. quinti. & PL ad KO. si autem quatuor sint magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam proportionem ^e habet ejus, quam habet ad secundam. ergo & AB solidum ad ^e 11. Def. quinti. solidum KO triplicatam habet proportionem ejus, quam AB ad EX. sed ut AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; & AE recta linea ad ipsam EK. quare & AB solidum ad solidum KO triplicatam proportionem habebit ejus, quam AE habet ad EK. æquale autem est solidum KO solido CD, & recta linea EK rectæ CF est æqualis. ergo & AB solidum ad solidum CD triplicatam habet proportionem ejus, quam latus ipsius homologum AE habet ad CF homologum latus. Quod demonstrare oportebat.

Cor. Ex hoc manifestum est, si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita esse solidum parallelepipedum quod fit à prima ad solidum quod à secunda, simile, & similiter descriptum; quoniam & prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad secundam.

PROP. XXXIV. THEOR.

Æqualium solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases & altitudines; & quorum solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases & altitudines, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia solida parallelepipeda AB CD. dico ipsorum bases & altitudines reciprocari, hoc est ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Sint enim primo stantes AGEFLBHK CMNXODPR ad rectos angulos basibus ipsorum. dico ut EH basis ad basim NP, ita esse CM ad AG. si igitur



basis EH basi NP fit æqualis, est autem & AB solidum æquale solido CD ; erit & CM æqualis ipsi AG . si d enim basibus EH NP æqualibus existentibus non sunt AG CM altitudines æquales, neque AB solidum solido CD æquale erit; ponitur autem æquale. non igitur inæqualis est altitudo CM altitudini AG . ergo æqualis sit necesse est; ac propterea ut EH basis ad basim NP ,

ita erit CM ad AG .

At vero non fit basis

EH æqualis basi NP :

sed EH fit major. est

autem & AB solidum

solido CD æquale.

ergo major est

CM ipsa AG ; alioqui

rursus sequeretur so-

lida AB CD æqualia non esse, quæ ponuntur æqualia. itaque ponatur CT æqualis ipsi AG : & à basi quidem NP , altitudine autem CT solidum parallelepipedum VC compleatur. quoniam igitur solidum AB solido CD est æquale, aliud

¶ 7. quinti.

autem aliquod est VC , & æqualia a ad idem eandem habent proportionem; erit ut AB solidum ad solidum VC , ita CD solidum ad solidum CV . sed ut AB solidum ad solidum CV ,

¶ 32. hujus.

ita b basis EH ad NP basim; æque alta enim sunt AB CV solida.

¶ 25. hujus.

ut autem solidum CD ad ipsam CV , ita c MP basis ad basim

¶ 1. sexti.

PT , & MC d ad CT . & igitur ut basis EH ad NP basim, ita MC ad CT . est autem CT æqualis AG . ergo & ut EH basis ad basim NP , ita MC ad AG . quare solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines

reciprocentur: sitque ut EH basis ad basim NP , ita solidi

CD altitudo ad altitudinem solidi AB . Dico solidum AB solido CD æquale esse. sint enim rursus stantes ad rectos angulos basibus. & si quidem basis EH fit æqualis basi NP ,

estque ut EH basis ad basim NP , ita altitudo solidi CD ad

solidi AB altitudinem: erit solidi CD altitudo altitudini soli-

lidi AB æqualis. solida autem parallelepipeda, quæ sunt in

¶ 31. hujus.

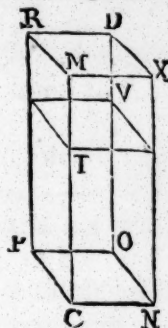
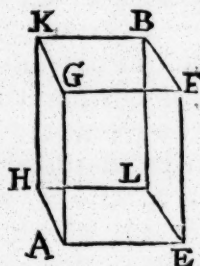
æqualibus basibus & eadem altitudine inter se e æqualia sunt ergo solidum AB solido CD est æquale. Sed non fit EH basis æqualis basi NP , & fit EH major. major igitur est & soli-

lidi CD altitudo altitudine solidi AB , hoc est CM ipsa AG .

ponatur ipsi AG æqualis rursus CT , & similiter solidum CV compleatur. itaque quoniam est ut EH basis ad basim NP ,

ita MC ad ipsam AG ; æqualis autem est AG ipsi CT : erit ut

basis EH ad NP basim, ita MC ad CT . sed ut basis EH ad

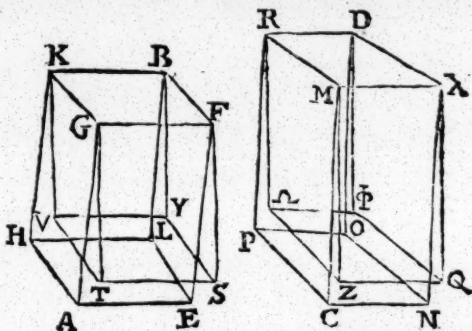


NP basim, ita AB solidum ad solidum VC; æque alta enim sunt solida ABCV. ut autem MC ad CT, ita & MP basis ad basim PT, & solidum CD ad CV solidum. & igitur ut solidum AB ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. quod cum utrumque solidorum AB CD ad ipsam CV eandem proportionem habeat; erit AB solidum solido CD æquale. Quod demonstrare oportebat.

Non sint autem stantes FEBLGA KH, XNDO MCRP ad rectos angulos basibus ipsorum: & à punctis FGBK, XMDR ad plana basium EHNP ducantur perpendiculares, quæ planis in punctis STYV, QZΩΦ occurrant & compleantur solida FVXΩ. dico & sic æqualibus existentibus solidis ABCD, bases & altitudines reciprocari, scil. ut EH

basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. quoniam enim solidum AB solido CD est æquale; solido autem AB æquale est f solidum BT; in eadem namque sunt basi FK, & eadem altitudine;

quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: & solidum DC est æquale solido DZ, quod in eadem sint basi XR, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis; erit & solidum BT solido DZ æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos, bases & altitudines reciprocantur. est igitur ut FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. atque est basis quidem FK basi EH æqualis, basis vero XR æqualis basi NP. quare ut EH basis ad basim NP. ita est altitudo solidi DZ ad solidi BT altitudinem. eadem autem sunt altitudines solidorum DZ DC, itemque solidorum BT BA. est igitur ut EH basis ad basim NP, ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi AB. ergo solidorum parallelepipedorum ABCD bases & altitudines reciprocantur. Rursus solidorum parallelepipedorum ABCD bases & altitudines reciprocantur, fitque ut EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. dico solidum AB solido CD æquale esse. iisdem namque constructis, quoniam ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB; & basis quidem EH est æqualis basi FK; NP vero ipsi XR: erit ut FK basis ad basim XR, ita altitudo



f 30. hujus.

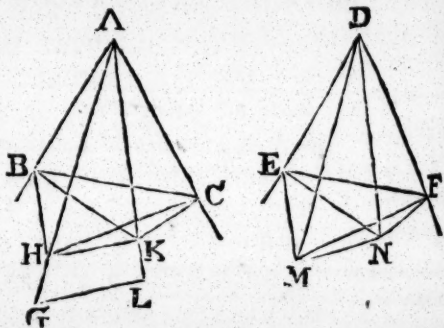
Ex ante demonstratis.

altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. eadem autem sunt altitudines solidorum AB BT , & ipsorum CD DZ . est igitur ut FK basis ad basim XR , ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT . quare solidorum BT DZ parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur, quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, & bases & altitudines reciprocantur, ea inter se sunt æqualia. ergo BT solidum solido DZ est æquale. sed solidum quidem BT æquale est solido BA , etenim in eadem sunt basi FK , & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: solidum vero DZ est æquale solido DC , si quidem in eadem sunt basi XR , & eadem altitudine, & non in eisdem rectis lineis. ergo & solidum AB solido CD est æquale. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXV. THEOR.

Si sint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum rectis lineis à principio positis angulos contineant æquales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quævis puncta, atque ab ipsis ad plana, in quibus sunt, anguli perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum sublimibus æquales angulos continebunt.

Sint duo anguli rectilinei æquales BAC EDF : & à punctis A D sublimes rectæ lineæ AG DM constituentur, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales angulos contineant, alterum alteri: angulum quidem MDE æqualem angulo GAB , angulum vero MDF angulo GAC æqualem: & sumantur in ipsis AG DM quævis puncta G , M , à quibus ad plana per BAC EDF ducantur perpendiculares GL MN occurrentes planis in punctis L N ; & LA ND jungantur. dico angulum GAL angulo MDN æqualem esse. ponatur ipsi DM æqualis AH , & per H ipsi GL parallela ducatur HK . est autem GL perpendicularis ad planum per



per BAC. ergo & HK ad ^a planum per BAC perpendicularis ^a 8. hujus.
 erit. ducantur à punctis K N ad rectas lineas AB AC DF DE
 perpendiculares KC NF KB NE, & HC CB MF FE jungan-
 tur. quoniam igitur quadratum ex HA æquale ^b est quadra-
 tis ex HK KA; quadrato autem ex KA æqualia ^b sunt ex ^b 47 primi.
 KC CA quadrata: erit quadratum ex HA quadratis ex HK
 KC CA æquale. quadratis autem ex HK KC æquale est qua-
 dratum ex HC. quadratum igitur ex HA quadratis ex HC CA
 æquale erit: & idcirco angulus HCA ^c est rectus. eadem ^c 48. primi.
 ratione & angulus DFM rectus est. ergo angulus ACH ipsi
 DFM est æqualis. est autem & HAC angulus æqualis an-
 gulo MDF. duo igitur triangula sunt MDF HAC duos an-
 gulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, &
 unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulo-
 rum subtenditur; videlicet HA ipsi DM. ergo & reliqua
 latera reliquis lateribus ^d æqualia habebunt, alterum alteri. ^d 26. primi.
 quare AC est æqualis DF. similiter demonstrabimus & AB ipsi
 DE æquale esse. jungantur enim HB ME. & quoniam quadra-
 tum ex AH est æquale quadratis ex AK KH; quadrato au-
 tem ex AK æqualia sunt quadrata ex AB BK: erunt qua-
 drata ex AB BK KH quadrato ex AH æqualia. sed quadra-
 tis ex BK KH æquale est ex BH quadratum; rectus enim
 angulus est HKB, propterea quod & HK perpendicularis est
 ad subiectum planum. quadratum ^b igitur ex AH æquale est
 quadratis ex AB BH. quare angulus ABH ^c rectus est. eadem
 ratione & angulus DEM est rectus. est autem & BAH an-
 gulus æqualis angulo EDM, ita enim ponitur: arque est AH
 æqualis DM. ergo & AB ipsi DE ^d est æqualis. quoniam
 igitur AC quidem est æqualis DF, AB vero ipsi DE; erunt
 duæ CA AB duabus FD DE æquales. sed & angulus BAC
 angulo FDE est æqualis. basis ^e igitur BC basi EF, & trian- ^e 4. primi.
 gulum triangulo, & reliqui anguli reliquis angulis æquales sunt.
 ergo angulus ACB angulo DFE est æqualis. est autem & rectus
 ACK æqualis recto DFN. quare & reliquus BCK reliquo
 EFN æqualis. eadem ratione, & CBK angulus est æqualis
 angulo FEN. itaque duo triangula sunt BCK FEN, duos an-
 gulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, &
 unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos,
 videlicet BC ipsi EF. ergo & ^d reliqua latera reliquis late-
 ribus æqualia habebunt. æqualis igitur est CK ipsi FN. est
 autem & AC ipsi DF æqualis. quare duæ AC CK duabus
 DF FN æquales sunt: & rectos continent angulos. basis igi-
 tur AK est æqualis basi DN. & cum AH sit æqualis DM,
 erit & quod fit ex AH quadratum quadrato ex DM æquale.
 sed quadrato ex AH æqualia sunt ex AK KH quadrata; ete-
 nim

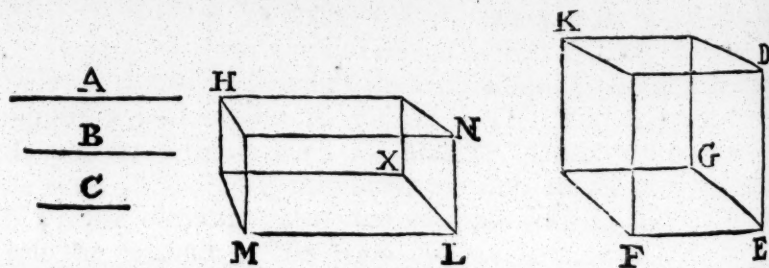
nim rectus est angulus AKH . quadrato autem ex DM æqualia sunt quadrata ex DN NM , quod angulus DNM rectus fit. quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN NM sunt æqualia. quorum quadratum ex AK æquale est quadrato ex DN , ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM est æquale. & ideo recta linea HK ipsi MN æqualis. quod cum duæ HA AK duabus MD DN æquales sint, altera alteri, & basis HK basi NM ostensa sit æqualis; angulus HAK f. 8. primi. angulo MDN æqualis f. erit. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituentur sublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares, quæ ab ipsis ad plana, in quibus sunt primi anguli, ducantur, inter se æquales esse.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod à tribus fit, æquale est solido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C , sit scilicet ut A ad B ita B ad C . dico solidum quod fit ex ipsis A B C , æquale esse solido quod fit ex B , æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E contentus tribus angulis planis DEG GEF FED ; & ipsi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipsarum DE GE EF ; & solidum



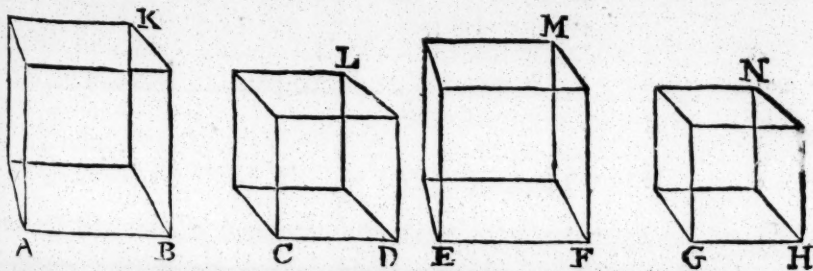
parallelepipedum EX compleatur: ipsi vero A ponatur æqualis LM ; & ad rectam lineam LM , & ad punctum in a 26. hujus. ipsa L , constituatur angulo solido ad E æqualis angulus contentus NLX MLN ; & ponatur ipsi quidem B æqualis LN , ipsi vero C æqualis LX . quoniam igitur est ut A ad B ita B ad C , æqualis autem est A ipsi LM , & B unicuique ipsarum LN EF EG ED , & C ipsi LX ; erit ut LM ad EF ita

ita GE ad LX. & circum æquales angulos MLX GEF, latera sunt reciproca. ergo MX parallelogrammum parallelogrammo GF est ^b æquale. & quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt GEF XLM, & in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur LN ED æquales inter se, & cum rectis lineis à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt ^c perpendiculares quæ à punctis N D ad plana per XLM GEF ducuntur, inter se æquales. ergo solida LHEK eadem sunt altitudine. quæ vero in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, & eadem altitudine, inter se ^d sunt æqualia. ergo solidum HL æquale est solido EK. ^{d 31. hujus.} atque est solidum quidem HL quod fit à tribus ABC, solidum vero EK quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod fit à tribus, æquale est solidum parallelepipedo quod fit, &c. Quod demonstrare oportebat. ^{Cor. 35. hujus.}

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales ABCDEFGH, sit scilicet ut AB ad CD, ita EF ad GH, & describantur ab ipsis ABCDEFGH similia & similiter posita solida parallelepipeda KALCME NG. dico ut KA ad LC, ita esse ME ad NG. Quoniam enim solidum parallelepipedum KA simile est ipsi LC, habebit ^a KA ad LC triplicatam proportionem ejus



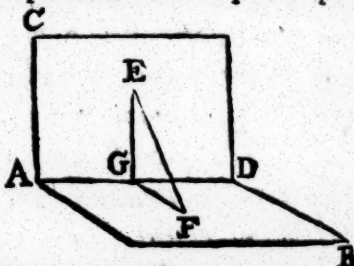
quam AB habet ad CD. eadem ratione & solidum ME ad ipsum NG ^a triplicatam proportionem habebit ejus quam EF ad GH. atque est ut AB ad CD, ita EF ad GH. ut igitur KA ad LC, ita ME ad NG. Sed fit ut solidum AK ad solidum LC, ita ME solidum ad solidum NG. dico, ut

6 33. hujus. recta linea AB ad rectam CD, ita esse rectam EF ad ipsam GH; quoniam enim rursus AK ad LC triplicatam^b proportionem habet ejus quam AB habet ad CD; habet autem & ME ad NG triplicatam proportionem ejus quam EF ad GH; atque ut AK ad LC, ita ME ad NG: erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Si planum ad planum rectum sit; & ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano, ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem cadet.

Planum nempe CD ad planum AB rectum sit, communis autem eorum sectio sit AD, & in ipso CD plano, quodvis punctum E sumatur. dico perpendicularem quæ à puncto E ad planum AB ducitur,



cadere in ipsam AD. Non enim; sed si fieri potest, cadat extra, ut EF; & plano AB in puncto F occurrat: à puncto autem F ad DA in plano AB perpendicularis^a ducatur FG, quæ quidem

^b 4. Def. hujus.

^c 3. Def. hujus.

^d 17. primi.

& plano CD ad^b rectos angulos erit; & EG jungatur. quoniam igitur FG plano CD est ad rectos angulos; contingit autem ipsam recta linea EG quæ est in eodem CD plano: erit angulus FGE^c rectus. sed & EF plano AB ad rectos angulos est; rectus igitur est angulus EFG. quare trianguli EFG duo anguli duobus rectis sunt æquales; quod est^d absurdum. non igitur à puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad planum rectum sit, &c. Quod oportebat demonstrare.

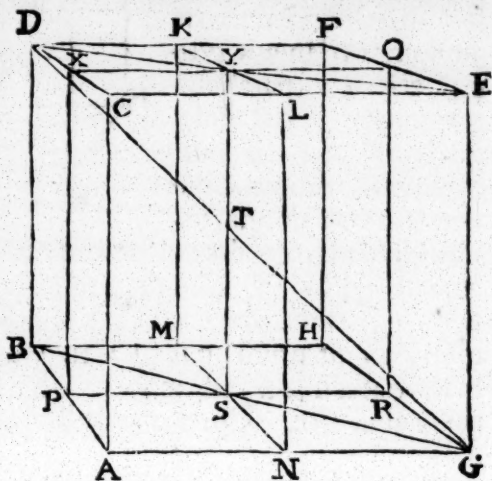
PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido perallelepipedo oppositorum planorum latera secantur bifariam, per sectiones vero plana ducantur; communis planorum sectio, & solidi parallelepipedum diameter, sese bifariam secabunt.

In solido enim parallelepipedo AF, oppositorum planorum CF AH latera bifariam secantur in punctis KLMNXORP.[&]

& per sectiones plana ducantur KN XR ; communis autem planorum sectio sit YS , & solidi parallelepipedi diameter sit DG . dico YS DG sese bifariam secare, hoc est YT quidem ipsi TS , DT vero ipsi TG æqualem esse. Jungantur enim DY EB SG . quoniam igitur DX parallela est ipsi OE , alterni anguli DXY YOE inter se æquales ^a sunt. & quoniam ^{a 29. primi.}

DX quidem est æqualis OE , XY vero ipsi YO , & angulos æquales continent; erit b basis DY æqualis basi YE . & triangulum DXY triangulo YOE , & reliqui anguli reliquis angulis æquales, angulus igitur XYD est æqualis angulo OYE , & ob id c recta linea est DYE . eadem ratione, & BSG recta est, atque est BS æqualis SG . &



^b 4. primi.

^c 14. primi.

quoniam CA ipsi DB æqualis est & parallela, & CA est æqualis & parallela ipsi EG ; erit & DB ipsi EG æqualis & parallela; & ipsas conjungunt rectæ lineæ DE GB : parallela igitur ^d est DE ipsi BG . & sumpta sunt in utraque ipsa ^{d 33. primi.} quævis puncta DY GS , & junctæ sunt DG YS . ergo DG YS in uno ^e sunt plano. quod cum DE sit parallela BG , ^{e 7. hujus.} erit & EDT angulus angulo BGT æqualis ^a, alterni enim sunt. est autem & DTY angulus æqualis ^f ipsi GTS . duo ^{f 15. primi.} igitur sunt triangula DTY GTS duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur, videlicet DY ipsi GS : dimidia enim sunt ipsorum DE BG . ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. quare DT quidem est æqualis TG , YT vero ipsi TS . Si igitur in solido parallelepipedo, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XL. THEOR.

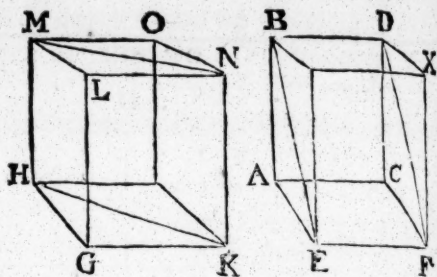
Si sint duo prismata æque alta, quorum unum quidem basim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, & parallelogrammum duplum sit trianguli; ea inter se æqualia erunt.

Sint prismata æquæ alta $ABCDEFGHKL MN$. & unum quidem basim habeat parallelogrammum AF , alterum vero

N 3

$G H K$

GHK triangulum, & duplum sit AF parallelogrammum trianguli GHK. dico prisma ABCDEF prismati GHKLMN æquale esse. Compleantur enim AXGO solida. & quoniam parallelogrammum AF trianguli GHK est duplum; est autem & HK parallelogrammum duplum a trianguli GHK: erit AF parallelogrammum parallelogrammo HK æquale. quæ vero in æqualibus sunt basibus solida pa-



- a 41. primi. rallelepipeda, & eadem altitudine, inter se æqualia ^b sunt, æquale igitur AX solidum solido GO. atque est solidi quidem AX dimidium ^c ABCDEF prisma, solidi vero GO dimidium ^c est prisma GHKLMN. ergo ABCDEF prisma prismati GHKLMN est æquale. Si igitur sint duo prismata æque alta, &c. Quod demonstrare oportebat.

EUCLIDIS

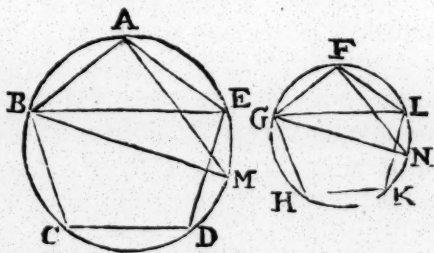
ELEMENTORUM

LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO. I. THEOREMA.

*Similia polygona circulis inscripta inter se sunt ut
diameterum quadrata.*

Sint circuli $ABCDE$ $FGHKL$, & in ipsis similia polygona $ABCDE$ $FGHKL$; diametri autem circulorum sint BM GN . dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN , ita esse $ABCDE$ polygonum ad polygonum $FGHKL$. jungantur enim BE AM KL FN . & quoniam polygonum $ABCDE$ simile est polygono $FGHKL$; & BAE angulus angulo GFL est æqualis: atque est ut BA ad AE , ita GF ad FL . duo igitur triangula sunt BAE GFL unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL , circa æquales autem angulos latera proportionalia: quare triangulum ABE triangulo FGL æqui-



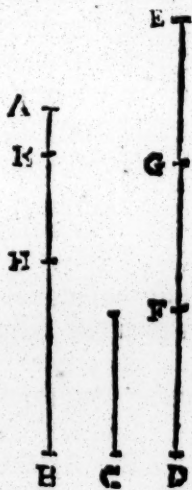
angulum ^a est; ac propterea angulus AEB æqualis est angulo FLG . sed angulus quidem AEB angulo AMB est ^b æqualis; in eadem enim circumferentia consistunt. angulus autem FLG æqualis ^b est angulo FNG . ergo & AMB angulus est æqualis angulo FNG . est autem & rectus ^c angulus BAM æqualis recto GFN . quare & reliquis reliquo æqualis. æquiangulum igitur est triangulum AMB triangulo FNG . ergo ^d ut BM ad GN ita BA ad GF . sed proportionis quidem BM ad GN duplicata est proportio quadrati ex BM ad quadratum

a 20. sexti. quadratum ex GN ; proportionis vero BA ad GF duplicata, est proportio $ABCDE$ polygoni ad polygonum $FGHKL$: & ut igitur quadratum ex BM ad quadratum ex GN , ita polygonum $ABCDE$ ad $FGHKL$ polygonum. Quare similia polygona quæ in circulis describuntur, inter se sunt ut diametrorum quadrata. Quod demonstrare oportebat.

LEMMA.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium; & hoc semper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo quæ minori magnitudine exposita minor erit.

Sint duæ magnitudines inæquales AB , C , quarum major AB . dico si ab ipsa AB auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit. etenim C multiplicata, fiet aliquando major magnitudine AB . multiplicetur, & sit DE ipsius quidem C multiplex, major autem quam AB : dividaturque DE in partes ipsi C æquales DF FG GE . & ab ipsa AB auferatur majus quam dimidium BH , ab ipsa vero AH rursus majus quam dimidium auferatur HK , atque hoc semper fiat, quoad divisiones, quæ sunt in AB , multitudine æquales sunt divisionibus quæ in DE : sint igitur



divisiones AK KH HB , divisionibus DF FG GE multitudine æquales. & quoniam major est DE quam AB , & ablatum est ab ipsa quidem DE minus quam dimidium EG : ab ipsa vero AB majus quam dimidium BH : erit reliquum GD reliquo HA majus, rursus quoniam major est GD , quam HA : & ablatum est ab ipsa quidem GD dimidium GF ; ab ipsa vero HA majus quam dimidium HK : reliquum FD reliquo AK majus erit. estque FD æqualis ipsi C ergo C quam AK est major. minor igitur est AK quam C . ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK , exposita minori magnitudine

tudine c minor. Quod demonstrare oportebat. Similiter autem demonstrabitur, etiam si dimidia ablata fuerint. *Est prima decimi.*

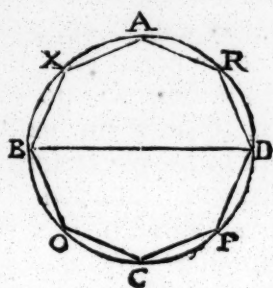
PROP. II. THEOR.

Circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata.

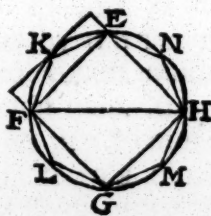
Sint circuli ABCD EFGH, diametri autem ipsorum sint BDFH. dico ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita esse circuli ABCD ad EFGH circulum. Si enim non ita sit; erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spatium aliquod minus circulo EFGH, vel ad majus. sit primum ad minus

quod sit s. & in circulo EFGH describatur quadratum EFGH. itaque descriptum in circulo quadratum majus est dimidio circuli EFGH, quoniam si per puncta EFGH contingentes circulum ducamus, erit descripti circa circulum quadrati ^a dimidium EFGH. descripto autem circa circulum quadrato minor est circulus. ergo quadratum EFGH majus est dimidio circuli EFGH. secentur bifariam circumferentiæ EF FG GH HE in punctis K L M N: & EK K F FL LG GM MH HN NE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EK F FLG GM H NE majus est dimidio segmenti circuli in quo consistit: quoniam si per puncta K L M N contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quæ sunt in rectas lineas EF FG GH HE compleamus; erit ^b unumquodque triangulorum EK F FLG GM H NE dimidium parallelogrammi, quod ad ipsum est.

sed segmentum minus est parallelogrammo. quare unumquodque triangulorum EK F FLG GM H NE majus est dimidio segmenti circuli, in quo consistit. Hasce igitur circumferentias bifariam secantes, & jungentes rectas lineas, atque hoc semper facientes, relinuemus tandem quædam circuli segmenta, quæ minora erunt excessu, quo circulus EFGH ipsum s spatium superat. etenim ostensum est in præcedenti Lemmate, duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod relinquitur, rursus majus quam dimidium,

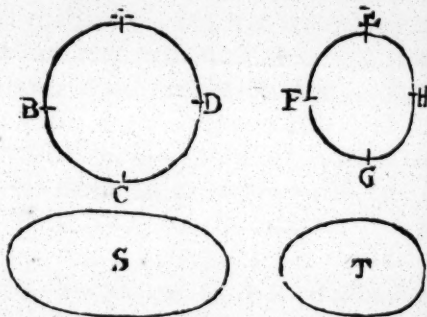


^a 47. primi.
& 31. tertii.



^b 41. primi.

dium, & hoc semper fiat; relinqui tandem magnitudinem aliquam, quæ minori magnitudine expofita fit minor. itaque relicta sint segmenta circuli $EFGH$ in rectas lineas EK $KFFL$ $LKGM$ $MHHN$ NE , quæ minora sint excessu, quo circulus $EFGH$ ipsum s spatium superat. ergo reliquum $EKFLGMHN$ polygonum majus erit spatio s. Describatur etiam in circulo $ABCD$, polygono $EKFLGMHN$ simile polygonum $AXBOCPDR$. est igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH , ita polygonum $AXBOCPDR$ ad $EKFLGMHN$ polygonum. sed & ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH , ita $ABCD$ circulus ad spatium s. ergo & ut circulus $ABCD$ ad spatium s, ita polygonum $AXBOCPDR$ ad $EKFLGMHN$ polygonum. major autem est circulus $ABCD$ eo quod in ipso est polygono. quare & spatium s majus est e polygono $EKFLGMHN$. sed & f minus. quod fieri non potest. Non igitur est ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH ita $ABCD$ circulus ad spatium aliquod minus circulo $EFGH$. Similiter ostendemus neque esse ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD , ita circulum $EFGH$ ad aliquod spatium minus circulo $ABCD$. dico igitur neque esse ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH , ita circulum $ABCD$ ad aliquod spatium majus circulo $EFGH$. si enim fieri potest, sit ad majus spatium s. erit igitur invertendo ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD , ita spatium s ad $ABCD$ circulum. sed quoniam s majus est $EFGH$ circulo; erit ut spatium s ad $ABCD$ circulum, ita circulus $EFGH$ ad aliquod spatium minus circulo $ABCD$. ergo & ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD , ita $EFGH$ circulus ad aliquod spatium minus e circulo $ABCD$, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH , ita est circulus $ABCD$ ad spatium aliquod majus $EFGH$ circulo. ostensum autem est neque ad minus. quare ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH , ita erit $ABCD$ circulus ad circulum $EFGH$. Circuli igitur inter se sunt ut diametrorum quadrata. Quod ostendere oportebat.



PROP.

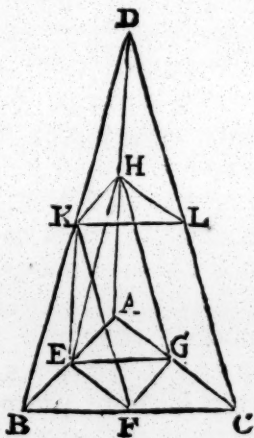
PROP. III. THEOR.

Omnis pyramis triangularem habens basim dividitur in duos pyramides æquales & similes inter se, quæ triangulares bases habent, similesque toti, & in duo prismata æqualia, quæ quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt majora.

Sit pyramis, cujus basis quidem ABC triangulum; vertex autem punctum D . dico pyramidem $ABCD$ dividi in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares bases habentes, & similes toti, & in duo prismata æqualia; & duo prismata dimidio totius pyramidis esse majora. secentur enim $ABBCA$ $ADDBDC$ bifariam in punctis E F G H K L , & EH EG GH HK KL LH EK KF FG jungantur. quoniam igitur AE quidem est æqualis EB , AH vero ipsi HD ; erit AE ipsi DB parallela. eadem ratione & HK a 2. sexti. est parallela ipsi AB . parallelogrammum igitur est $HEBK$.

quare HK est b æqualis EB . sed EB ipsi AE est æqualis. ergo & AE ipsi HK æqualis erit. est autem & AH æqualis HD . duæ igitur AE AH duabus KH HD æquales sunt, altera alteri, & angulus EAH æqualis c angulo KHD ; basis igitur d EH basi KD est æqualis: quare triangulum AEH æquale est & simile triangulo HKD . eadem ratione & triangulum AHG triangulo $HL D$ æquale est & simile. & quoniam duæ rectæ lineæ sese tangentes EH HG duabus rectis lineis sese tangentibus KD DL parallelæ sunt, non autem in eodem plano, æquales

angulos e continebunt. ergo angulus EHG est æqualis angulo f KDL . rursus quoniam duæ rectæ lineæ EH HG duabus KD DL æquales sunt, altera alteri, & angulus EHG est æqualis angulo KDL ; erit d basis EG basi KL æqualis: æquale igitur est & simile triangulum EHG triangulo KDL . eadem ratione & AEG triangulum est æquale & simile triangulo HKL . quare pyramis cujus basis quidem est AEG triangulum, vertex autem punctum H , æqualis & similis est pyramidi cujus basis est triangulum KHL , & vertex D punctum. & quoniam uni laterum trianguli ADB , videlicet ipsi AB , parallela ducta est HK ; erit triangulum ADB triangulo DKH æquiangulum,



b 34. primi.

c 29. primi.

d 4. primi.

e 10. undecimi.

ipſi recta linea HK, majus eſt pyramide cujus baſis AEG triangulum & vertex punctum H. priſma vero cujus baſis parallelogrammum EBFG, & oppoſita ipſi recta linea HK eſt æquale priſmati cujus baſis GFC triangulum, & ipſi oppoſitum triangulum HKL: & pyramis cujus baſis triangulum AEG, vertex autem H punctum, eſt æqualis pyramidi cujus baſis HKL triangulum, & vertex punctum D. ergo duo priſmata de quibus dictum eſt, ſunt majora duabus dictis pyramidibus quarum baſes triangu- la AEG HKL, vertices autem H D puncta. Tota igitur pyramis cujus baſis ABC triangulum, vertex autem punctum D, diviſa eſt in duas pyramides æquales, & ſimiles inter ſe, & ſimiles toti: & in duo priſmata æqualia: ſuntque duo priſmata dimidio totius pyramidis majora. Quæ oſtendere oportebat.

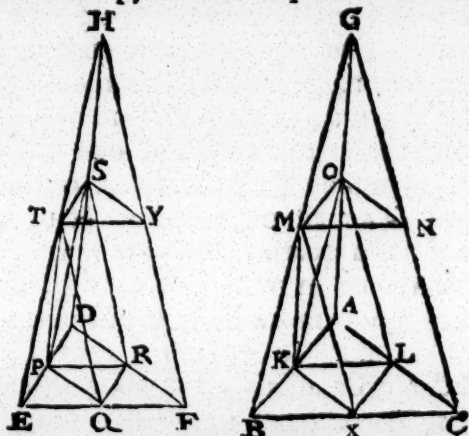
PROP. IV. THEOR.

Si ſint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares baſes habeant, dividatur autem utraque ipſarum, & in duas pyramides æquales inter ſe, ſimilesque toti, & in dua priſmata æqualia; & factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc ſemper fiat: erit ut unius pyramidis baſis ad baſim alterius, ita & in una pyramide priſmata omnia ad priſmata omnia in altera pyramide multitudine æqualia.

Sint duæ pyramides æque altæ quæ triangulares baſes habeant ABC DEF, vertices autem ſint puncta G H, & dividatur utraque ipſarum in duas pyramides æquales inter ſe,

ſimilesque toti, & in duo priſmata æqualia;

& factarum pyramidum utraque eodem modo diviſa intelligatur: atque hoc ſemper fiat. dico ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſſe priſmata omnia quæ ſunt in pyramide ABCG ad priſmata omnia quæ in pyramide DEFH multitudine æqualia. Quoniam enim BX quidem eſt æqualis XC, AL vero æqualis LC; erit $\angle$ XL ipſi AB parallela, & triangulum ABC triangulo LXC ſimile. eadem ratione & triangulum



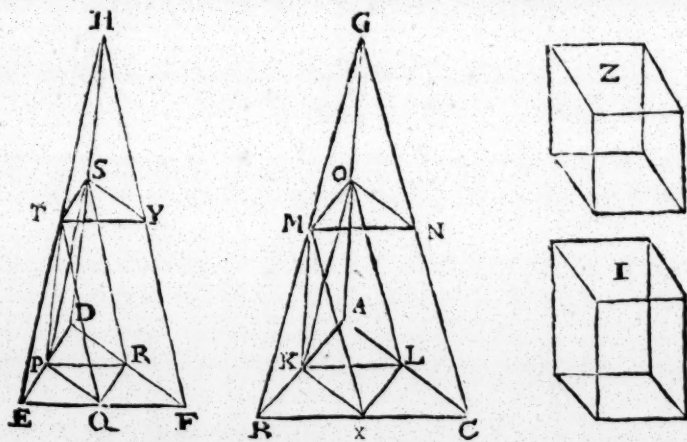
gulum DEF simile est triangulo RQF. & quoniam BC quidem est dupla CX, EF vero dupla ipsius FQ, ut BC ad CX, ita erit EF ad FQ. & descripta sunt ab ipsis FCCX similia & similiter posita rectilinea ABC/LXC; ab ipsis vero EFFQ similia & similiter posita rectilinea DEF/RQF. est igitur ^b ut BAC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum; & permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. sed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita ^c prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cujus basis RQF triangulum & oppositum ipsi STY. ut igitur ^d ABC triangulum ad triangulum DEF, ita prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cujus basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. & quoniam duo prismata quæ in pyramide ABCG inter se æqualia sunt, sed & quæ in pyramide DEFH prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma cujus basis parallelogrammum KLB, opposita vero ipsi recta linea MO, ad prisma cujus basis LXC triangulum, & oppositum ipsi OMN, ita prisma cujus basis parallelogrammum EPRQ, & opposita recta linea ST, ad prisma cujus basis RQF triangulum, oppositum vero ipsi STY. quare componendo, ut prismata KBXLMO LXC MN ad prisma LXC MN, ita prismata PEQRST RQFSTY ad prisma RQFSTY. & permutando, ut prismata KBXLMO LXC MN ad prismata PEQRST RQFSTY, ita prisma LXC MN ad prisma RQFSTY. ut autem prisma LXC MN ad prisma RQFSTY, ita ostensa est basis LXC ad RQF basim, & ABC basis ad basim DEF. ergo & ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH. similiter autem, & si factas pyramides dividamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis ABC ad DEF basim. & ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH; & quatuor ad quatuor. eadem autem ostendentur & in factis prismatibus ex divisione pyramidum AKLO, & DPRS, & omnium simpliciter multitudine æqualium. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

PROP. V. THEOR.

Pyramides quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF , vertices autem puncta G H . dico ut ABC basis ad basim DEF , sic esse pyramidem $ABCG$ ad $DEFH$ pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF , sic $ABCG$ pyramis, vel ad solidum minus pyramide $DEFH$, vel ad majus. sit primum ad solidum minus, sitque Z . & dividatur pyramis $DEFG$ in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia. sunt duo igitur prismata ^a dimidio totius pyramidis ^a 3. hujus. majora. & rursus pyramides ex divisione factæ similiter dividantur, atque hoc semper fiat, quoad sumantur quædam pyramides à pyramide $DEFH$, quæ sint minores excessu quo pyramis $DEFH$ solidum Z superat. itaque sumantur, &



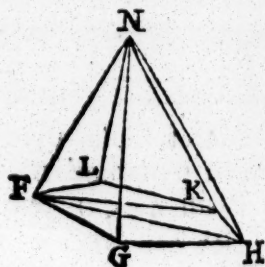
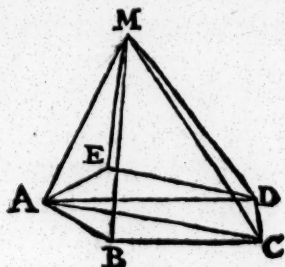
sint exempli causa, pyramides $DPRS$ $STYH$. erunt igitur reliqua in pyramide $DEFH$ prismata solido Z majora. dividatur etiam $ABCG$ pyramis in totidem partes similes pyramidi $DEFH$. ergo ^b ut ABC basis ad basim DEF , ita quæ ^b 4. hujus. in pyramide $ABCG$ prismata ad prismata quæ in pyramide $DEFH$. sed ut ABC basis ad basim DEF , ita pyramis $ABCG$ ad solidum Z . & igitur ut $ABCG$ pyramis ad solidum Z , ita quæ in pyramide $ABCG$ prismata ad prismata quæ in pyramide $DEFH$. major autem est pyramis $ABCG$ prismatibus quæ in ipsa sunt. ergo & solidum Z prismatibus, quæ sunt in pyramide $DEFH$, est majus. sed & ^c minus. ^c Ex prius demonstratis. quod fieri non potest. non igitur ut ABC basis ad basim DEF , ita est pyramis $ABCG$ ad solidum aliquod minus pyramide $DEFH$. similiter ostendemus neque ut DEF basis ad basim

basim ABC , ita esse pyramidem $DEFH$ ad solidum aliquod pyramide $ABCH$ minus. dico igitur neque esse ut ABC basis ad basim DEF , ita $ABCG$ pyramidem ad aliquod solidum majus pyramide $DEFH$. si enim fieri potest, sit ad majus, videlicet ad solidum I . erit igitur invertendo ut DEF basis ad basim ABC , ita solidum I ad $ABCG$ pyramidem. cum autem solidum I majus est pyramide $EDFH$, erit ut solidum I ad $ABCG$ pyramidem, ita $DEFH$ pyramis ad solidum aliquod minus pyramide $ABCG$, ut proxime ostensum fuit. & ut igitur DEF basis ad basim ABC , ita pyramis $DEFH$ ad solidum aliquod pyramide $ABCG$ minus, quod est absurdum. non igitur ut ABC basis ad basim DEF , ita est $ABCG$ pyramis ad solidum aliquod majus pyramide $DEFH$. ostensum autem est, neque ad minus. quare ut ABC basis ad basim DEF , ita est pyramis $ABCG$ ad $DEFH$ pyramidem. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

PROP. VI. THEOR.

Pyramides, quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quæ polygonas bases habeant $ABCDE$ $FGHKL$: vertices autem M N puncta. dico ut $ABCDE$ basis ad basim $FGHKL$, ita esse $ABCD$ pyramidem ad pyramidem $FGHKL$. dividatur enim basis quidem $ABCDE$ in triangula ABC ACD ADE ; basis vero



$FGHKL$ dividatur in triangula FGH FHK FKL . & in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æque altæ atque pyramides quæ à principio. quoniam igitur est ut triangulum ABC ad triangulum ACD , ita $ABCM$ pyramis ad pyramidem $ACDM$: & componendo ut $ABCD$ trapezium ad triangulum ACD , ita $ABCD$ pyramis ad pyramidem $ACDM$. sed & ut ACD triangulum ad ADE , ita $ACDM$ pyramis ad $ADEM$ pyramidem. ergo ex æquali, ut $ABCD$ basis ad basim ADE , ita $ABCD$ pyramis ad pyramidem $ADEM$. &

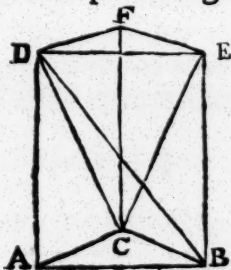
e 5. hujus.

& rursus componendo ut $ABCDE$ basis ad basim ADE , ita $ABCDEM$ pyramis ad pyramidem $ADEM$. eadem ratione, & ut $FGHKL$ basis ad basim FKL , ita & $FGHKLN$ pyramis ad $FKLN$ pyramidem. & quoniam duæ pyramides sunt $ADEM$ $FKLN$, quæ triangulares bases habent, & eadem sunt altitudine; erit ^a ut ADE basis ad basim FKL , ita $ADEM$ pyramis ad pyramidem $FKLN$. quod cum sit ut $ABCDE$ basis ad basim ADE , ita $ABCDEM$ pyramis ad pyramidem $ADEM$; ut autem ADE basis ad basim FKL , ita $ADEM$ pyramis ad pyramidem $FKLN$: erit ex æquali, ut basis $ABCDE$ ad FKL basim, ita $ABCDEM$ pyramis ad pyramidem $FKLN$. sed & ut FKL basis ad basim $FGHKL$, ita erat & $FKLN$ pyramis ad pyramidem $FGHKLN$. quare rursus ex æquali, ut $ABCDE$ basis ad basim $FGHKL$, ita est $ABCDEM$ pyramis ad pyramidem $FGHKLN$. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VII. THEOR.

Omne prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares bases habent.

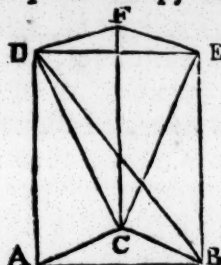
Sit prisma cujus basis quidem triangulum ABC , oppositum autem ipsi DEF . dico prisma $ABCDEF$ dividi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases. Jungantur enim $BDEC$ CD . & quoniam parallelogrammum est $ABED$ cujus diameter BD , erit ABD triangulum triangulo EBD ^a æquale. ergo pyramis cujus basis triangulum ABD , vertex autem punctum C , æqualis ^b est pyramidi, cujus basis EDB triangulum, & vertex punctum C . sed pyramis cujus basis EDB triangulum, & vertex punctum C , eadem est cum pyramide cujus basis triangulum EBC , & vertex D punctum: iisdem enim planis continentur. ergo & pyramis cujus basis triangulum ABD , vertex autem punctum C , æqualis est pyramidi cujus basis EBC triangulum, & vertex punctum D . rursus quoniam $FCBE$ parallelogrammum est cujus diameter CE , triangulum ECF triangulo CBE est ^a æquale. ergo & pyramis cujus basis BEC triangulum, vertex autem punctum D , æqualis est ^b pyramidi cujus basis triangulum ECF , & vertex punctum D . sed pyramis cujus



^a 34. primi.

^b 5. hujus.

basis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D ostensa est æqualis pyramidi cujus basis triangulum ABD , & vertex C punctum. quare & pyramis cujus basis triangulum CEF , & vertex punctum D , æqualis est pyramidi cujus basis triangulum ABD , & vertex C punctum. prisma igitur $ABCDEF$ dividitur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. Et quoniam pyramis cujus basis ABD triangulum, vertex autem punctum C , eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum CAB , & vertex D punctum, iisdem namque planis continetur; pyramis autem, cujus basis triangulum ABD , & vertex punctum C , tertia pars ostensa est prismatis cujus basis ABC triangulum, & oppositum ipsi DEF : & pyramis igitur, cujus basis triangulum ABC , vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum, & oppositum ipsi triangulum DEF . Quod demonstrare oportebat.



COROLL.

1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, & altitudinem æqualem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppositam ipsi eandem; dividitur in prismata quæ triangulares bases habent, basibusque opposita etiam triangula.

2. Prismata æque alta sunt inter se ut bases.

PROP. VIII. THEOR.

Similes pyramides quæ triangulares bases habent, in triplicata sunt proportionem homologorum laterum.

Sint similes & similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF , vertices autem G H puncta. dico $ABCG$ pyramidem ad pyramidem $DEFH$, triplicatam proportionem habere ejus quam BC habet ad EF . Compleantur enim $BGML$ $EHPO$ solida parallelepipeda. & quoniam pyramis $ABCG$ similis est pyramidi $DEFH$, erit angulus ABC angulo DEF æqualis, angulusque GBC æqualis angulo HEF , & angulus ABG angulo DEH . atque est ut AB ad DE , ita BC ad EF , & BG ad EH . quoniam igitur est

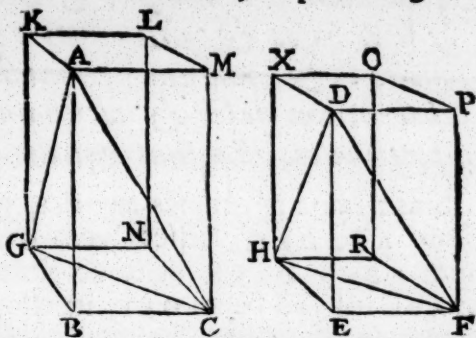
¶ 9. Def. undecimi.

¶ 1. Def. sexti.

ut A
later
logra
mum
rall
para
ipfi
mo.
logra
tribu
fimi
dem
bus
& fi
lia &
& n
B G
lepi
rum
habe
ad
EH
enit
diur
& p
port
mon

C
mul
ne
tria
qua
men
una
alte
in u
tera
mu
gula
ad
cat
pol
ber
hor

ut AB ad DE, ita BC ad EF, & circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. eadem ratione, & parallelogrammum BN simile est parallelogrammo FR, & parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrammo. tria igitur parallelogramma BM KB BN. tribus EP EX ER sunt familia. sed tria quidem MB BK BN tribus oppositis æqualia



& similia sunt, tria vero EP EX ER tribus oppositis æqualia & similia. quare solida BGML EHPO similibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea & simile est BGML solidum solidum EHPO. familia autem solida parallelepipedum in triplicata sunt proportionem homologorum laterum. ergo solidum BGML ad solidum EHPO triplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed ut BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma quod est dimidium solidi parallelepipedum, sit pyramidis triplicum. quare & pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam proportionem habebit ejus quam BC habet ad EF. Quod demonstrare oportebat.

c 24. undecimi.

d 9. Def. undecimi.

e 33. undecimi.

f 15. quinti.

g 1. Cor. antecedentis.

Cor. Ex hoc perspicuum est, & similes pyramides quæ multangulas bases habent, inter se esse in triplicata proportionem homologorum laterum. ipsis enim divis in pyramides triangulares bases habentes: quoniam & similia polygonæ, quæ sunt in basibus, in similia triangula dividuntur, & numero æqualia & homologa totis; erit ut una pyramis in una pyramide triangularem habens basim ad pyramidem in altera triangularem basim habentem, ita & omnes pyramides in una pyramide triangulares habentes bases ad omnes in altera triangulares bases habentes; hoc est, ita pyramis ipsa multangulam habens basim ad pyramidem quæ multangulam basim habet. sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem quæ triangularem basim habet, est in triplicata proportionem homologorum laterum. & pyramis igitur polygonam habens basim ad pyramidem similem basim habentem, triplicatam proportionem habebit ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

PROP. IX. THEOR.

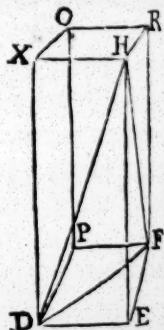
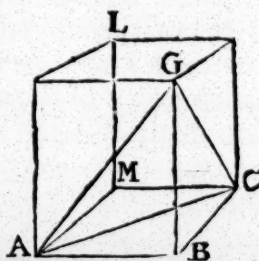
Equalium pyramidum, & triangulares bases habentium, bases & altitudines reciproce sunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illæ sunt æquales.

Sint nempe pyramides æquales, quæ triangulares bases habeant $ABCDEF$, vertices vero G H puncta. dico pyramidum $ABCG$ $DEFH$ bases & altitudines reciprocari; scilicet ut ABC basis ad basim DEF , ita esse pyramidis $DEFH$ altitudinem ad altitudinem pyramidis $ABCG$. Compleantur enim $BGML$ $EHPO$ solida parallelepipeda. & quoniam pyramis $ABCG$ est æqualis pyramidi $DEFH$, atque est pyramidis quidem $ABCG$ sextuplum $BGML$ solidum, pyramidis vero

¶ 15. quinti.

¶ 34. undecimi.

$DEFH$ sextuplum solidum $EHPO$; erit ¶ solidum $BGML$ solido $EHPO$ æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur *b*. est igitur ut BM basis ad basim EP , ita $EHPO$ solidi altitudo ad altitudinem solidi $BGML$. sed ut BM basis ad basim EP , ita ¶ ABC triangulum ad triangulum DEF . ergo



& ut ABC triangulum ad triangulum DEF , ita solidi $EHPO$ altitudo ad altitudinem solidi $BGML$. sed solidi quidem $EHPO$ altitudo eadem est cum altitudine pyramidis $DEFH$; solidi vero $BGML$ altitudo eadem est cum altitudine pyramidis $ABCG$: est igitur ut ABC basis ad basim DEF , ita pyramidis $DEFH$ altitudo ad altitudinem pyramidis $ABCG$. quare pyramidum $ABCG$ $DEFH$ bases & altitudines reciproce sunt proportionales. Et si pyramidum $ABCG$ $DEFH$ bases & altitudines reciproce sunt proportionales, sitque ut ABC basis ad basim DEF , ita pyramidis $DEFH$ altitudo ad altitudinem pyramidis $ABCG$: dico $ABCG$ pyramidem pyramidi $DEFH$ æqualem esse. iisdem enim constructis, quoniam ut ABC basis ad basim DEF , ita est $DEFH$ pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis $ABCG$; ut autem ABC basis ad basim DEF , ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP : erit & ut parallelogrammum BM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis $DEFH$ altitudo ad altitudinem

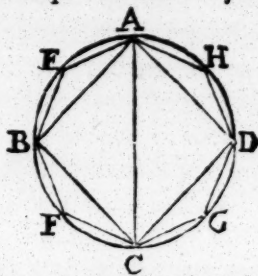
nem

nem pyramidis $ABCG$. sed pyramidis quidem $DEFH$ altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedum $EHPO$; pyramidis vero $ABCG$ altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedum $BGML$: est igitur ut BM basis ad basim EP , ita $EHPO$ solidi parallelepipedum altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedum $BGML$. quorum autem solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur, ea sunt æqualia. solidum igitur parallelepipedum $BGML$ æquale est solido parallelepipedo $EHPO$. atque est solidi quidem $BGML$ sexta pars pyramis $ABCG$: solidi vero $EHPO$ itidem sexta pars pyramis $DEFH$. ergo pyramis $ABCG$ pyramidis $DEFH$ est æqualis. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, bases & altitudines reciproce sunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illæ sunt æquales. Quod oportebat demonstrare.

PROP. X. THEOR.

Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet & altitudinem æqualem.

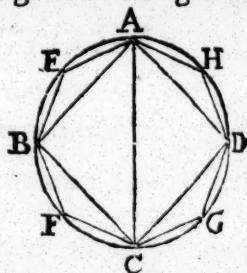
Habeat conus eandem basim quam cylindrus, videlicet circulum $ABCD$, & altitudinem æqualem. dico conum tertiam partem esse cylindri, hoc est cylindrum coni triplum esse. Si enim cylindrus non sit triplus coni, vel maior erit quam triplus, vel minor. sit primo maior quam triplus. & describatur in $ABCD$ circulo quadratum $ABCD$. ergo quadratum $ABCD$ majus est quam dimidium $ABCD$ circuli. & à quadrato $ABCD$ erigatur prisma æque altum cylindro. quod quidem prisma majus erit quam cylindri dimidium; quoniam si circa circulum $ABCD$ quadratum describatur, erit inscriptum quadratum dimidium circumscripti. & sint ab eisdem basibus erecta solida parallelepipeda æque alta, nimirum prismata ipsa. quare prismata inter se sunt æ ut bases. &



prisma igitur erectum à quadrato $ABCD$ dimidium est prismatis erecti à quadrato quod circa circulum $ABCD$ describitur. atque est cylindrus minor prismate erecto à quadrato quod describitur circa circulum $ABCD$. prisma igitur erectum à quadrato $ABCD$ æque altum cylindro, dimidio cylindri est majus. secantur circumferentiæ $AB BC CD DA$ bifariam in punctis $E F G H$, & $AE EB BF FC CG GD DH$

HA jungantur. unumquodque igitur triangulorum AEB
 ostenditur. BFC CGD DHA majus^b est dimidio portionis circuli ABCD,
 ad 2. hujus. in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB
 EFC CGD DHA prismata æque alta cylindro. ergo &
 unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio por-
 tionis cylindri quæ ad ipsum est. quoniam si per puncta
 E F G H parallelæ ipsis AB BC CD DA ducantur, & com-
 pleantur in ipsis AB BC CD DA parallelogramma, à qui-
 bus solida paralelepipedæ æque alta cylindro erigantur:
 erunt uniuscujusque erectorum dimidia prismata ea^a quæ
 sunt in triangulis AEB BFC CGD DHA. & sunt cylindri
 portiones erectis solidis paralelepipedis minores. ergo &
 prismata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA majora
 sunt dimidio portionum cylindri quæ ad ipsa sunt. itaque
 reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque re-
 ctas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pris-
 mata æque alta cylindro, &
 hoc semper facientes, tandem
 relinquemus quasdam portio-
 nes cylindri quæ minores erunt
 excessu, quo cylindrus coni tri-
 plum superat. relinquuntur
 jam, & sint AE EB BF FC CG
 GD DH HA. reliquum igitur

^c Lemma
 hujus.

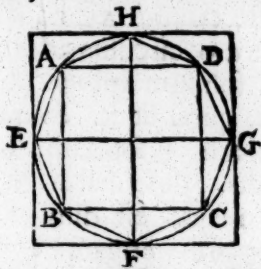


^d 1. Cor. 7.
 hujus.

prisma, cujus basis quidem polygonum AEBFCGDH, al-
 titudo autem eadem quæ cylindri, majus est quam triplum
 coni. sed prisma cujus basis AEBFCGDH polygonum, &
 altitudo eadem quæ cylindri, triplum^d est pyramidis, cujus
 basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui
 coni. & pyramis igitur cujus basis polygonum AEBFCG-
 DH, vertex autem idem qui coni, major est cono qui ba-
 sim habet ABCD circum. sed & minor: (ab ipso enim com-
 prehenditur.) quod fieri non potest. non igitur cylindrus
 major erit quam triplus coni. dico insuper neque cylindrum
 minorem esse quam triplum coni. Si enim fieri potest, sit
 cylindrus minor quam triplus coni. erit invertendo conus
 major quam tertia pars cylindri. describatur in ABCD circulo
 quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD majus est
 quam dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD eri-
 gatur pyramis, verticem habens eandem quem conus; py-
 ramis igitur erecta major est quam coni dimidium: quo-
 niam, ut ante demonstravimus, si circa circum quadratum
 describatur, erit quadratum ABCD dimidium ejus quod
 circa circum descriptum est: & si à quadratis erigantur
 solida paralelepipedæ æque alta cono, quæ & prismata ap-
 pellantur,

pellantur, erit α quod à quadrato $ABCD$ erigitur, dimidium
 ejus, quod erectum est à quadrato circa circulum descripto;
 etenim inter se sunt ut bases. quare & tertiæ partes ipsarum.
 pyramis igitur cujus basis quadratum $ABCD$, dimidia est
 ejus pyramidis quæ à quadrato circa circulum descripto
 erigitur. sed pyramis erecta à quadrato descripto circa cir-
 culum, major est cono; ipsum namque comprehendit. ergo
 pyramis cujus basis $ABCD$ quadratum, vertex autem idem
 qui coni, major est quam coni

dimidium. secantur circumfe-
 rentiæ $ABBCDDA$ bifariam
 in punctis $EFGH$. & jungantur
 $AEBBFFFGCGGDH$
 HA . & unumquodque igitur
 triangulorum $AEBBFC$ CGD
 DHA majus est quam dimi-

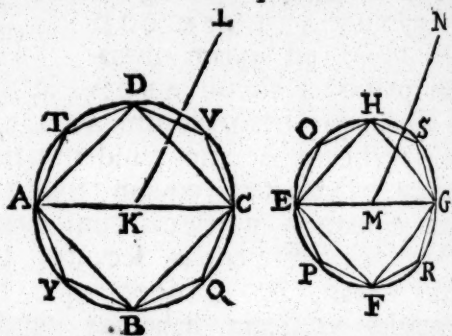


dium portionis circuli $ABCD$, in qua consistit. erigantur
 ab unoquoque triangulorum $AEBBFC$ CGD DHA pyra-
 mides verticem habentes eundem quem conus. ergo & una-
 quæque pyramidum eodem modo erectarum major est
 quam dimidium portionis coni quæ est ad ipsam. itaque
 reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque
 rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes
 pyramides verticem habentes eundem quem conus, &
 hoc semper facientes, relinquemus tandem quasdam coni
 portiones quæ minores erunt excessu quo conus tertiam
 cylindri partem superat. relinquantur; & sint quæ in ipsis AE
 $EBBFFFCGGDHHA$. reliqua igitur pyramis cujus
 basis polygonum $AEBBFCGDH$, & vertex idem qui coni, ma-
 jor est quam tertia cylindri pars. sed pyramis cujus basis
 polygonum $AEBBFCGDH$, vertex autem idem qui coni, tertia
 pars est prismatis cujus basis polygonum $AEBBFCGDH$, alti-
 tudo autem eadem quæ cylindri. prisma igitur cujus basis
 $AEBBFCGDH$ polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri,
 majus est cylindro cujus basis est circulus $ABCD$. sed &
 minus: (ab ipso enim comprehenditur.) quod fieri non po-
 test. non igitur cylindrus minor est quam triplus coni. o-
 stensum autem est neque majorem esse quam triplum. ergo
 cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus
 tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cy-
 lindri, eandem quam ipse basim habentis, & altitudinem æ-
 qualem. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XI. THEOR.

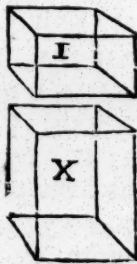
Coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases,

Sint in eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases circuli $ABCD$ & $EFGH$, axes autem KL & MN , & diametri basium AC & EG . dico ut $ABCD$ circulus ad circulum $EFGH$, ita esse conum AL ad EN conum. Si enim non ita fit; erit ut $ABCD$ circulus ad circulum $EFGH$, ita conus AL ad aliquod solidum minus cono EN , vel ad majus. fit primo ad minus quod sit X . & quo minus est solidum X cono EN , ei æquale sit I solidum. conus igitur EN ipsis solidis X & I est æqualis. describatur in $EFGH$ circulo quadratum $EFGH$, quod majus est dimidio circuli. erigatur à quadrato $EFGH$ pyramis æque alta cono. pyramis igitur erecta major est coni dimidio. nam si circa circulum quadratum describamus, & ab ipso erigamus pyramidem æque altam cono; erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptæ dimidium: etenim inter se ^a sunt ut bases. conus autem



^a 6. hujus.

circumscrip̃ta pyramide est minor. ergo pyramis cujus basis quadratum $EFGH$, vertex autem idem qui coni, major est coni dimidio. secentur circumferentiæ EF FG GH HE bifariam in punctis PR SO ; & OE EP



PF FR RG GS SH HO jungantur. unumquodque igitur triangulorum HOE EPF FRG GS H majus est quam dimidium segmenti circuli in quo consistit. erigatur ab unoquoque triangulorum HOE EPF FRG GS H pyramis æque alta cono. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est dimidio portionis coni, quæ est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, & jungentes rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æque altas cono, atque hoc semper facientes, ^b relinuemus tandem aliquas portiones coni, quæ solido I minores erunt. relinquantur, & sint quæ in ipsis HO OE EP PF FR GS

^b Lemma hujus.

^{SH}.

SH. reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum HOEPFRGS, altitudo autem eadem quæ coni, major est solido x. describatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS simile & similiter positum polygonum DTAYBQCV, & ab ipso erigatur pyramis æque alta cono AL. quoniam igitur est ut quadratum ex AC ad quadratum ex FG, ita ^c DTAYBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS; ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus ad circulum EFGH: erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS. sed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad x solidum: & ut polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS, ita pyramis cujus basis DTAYBQCV polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum HOEPFRGS, & vertex punctum N. ut igitur conus AL ad x solidum, ita pyramis, cujus basis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum HOEPFRGS, & vertex N punctum. conus autem AL major est pyramide quæ est in ipso. majus igitur est solidum x pyramide quæ est in cono EN. sed & ostensum est minus. quod fieri non potest. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est AL conus ad solidum aliquod minus cono EN. similiter demonstrabitur neque ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita esse conum EN ad aliquod solidum minus cono AL. dico præterea neque esse ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod solidum majus cono EN. Si enim fieri potest, fit ad solidum majus, quod fit Z. ergo invertendo ut EFGH circulus ad circulum ABCD ita erit solidum Z ad AL conum. sed cum fit solidum Z majus cono EN; erit ut solidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL. & igitur ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum majus cono EN. ostensum autem est neque esse ad minus. ergo ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum. sed ut conus ad conum, ita ^f est cylindrus ad cylindrum; est enim uterque utriusque ^g triplus. & igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita in ipsis cylindri æque alti conis. Ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

c 1. hujus.

d 2. hujus.

e 11. quinti.

f 15. quinti.

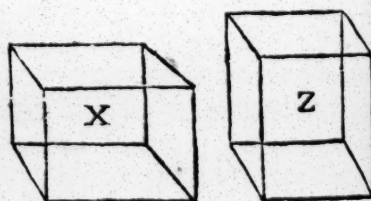
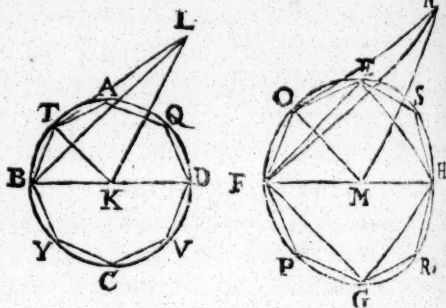
g 10. hujus.

PROP.

PROP. XII. THEOR.

Similes conī & cylindri inter se sunt in triplicata proportionē diametrorum quæ sunt in basibus.

Sint similes conī & cylindri, quorum bases quidem circuli $AB C D E F G H$, diametri vero basium $B D F H$, & axes conorum vel cylindrorum $K L M N$. dico conum cujus basis $A B C D$ circulus, vertex autem punctum L , ad conum cujus basis circulus $E F G H$, vertex autem N punctum, triplicatam habere proportionem ejus quam habet $B D$ ad $F H$. Si enim non habet conus $A B C D L$ ad conum $E F G H N$ triplicatam proportionem ejus quam $B D$ habet ad $F H$, habebit $A B C D L$ conus ad aliquod solidum minus cono $E F G H N$ triplicatam proportionem, vel, ad majus. Habeat primo ad minus, quod sit x . & describatur in $E F G H$ circulo quadratum $E F G H$. quadratum igitur $E F G H$ majus est dimidio $E F G H$ circuli. & erigatur à quadrato $E F G H$ pyramis æque alta cono. ergo erecta pyramis major est quam conī dimidium. itaque secantur $E F$ $F G G H H E$ circumferentiæ bifariam in punctis $O P R S$, & jungantur $E O O F F P P G G R R H H S S E$. unumquodque igitur triangulorum $E O F$ $F P G$ $G R H$ $H S E$ majus est



^a Lemma
hujus.

dimidio segmenti circuli $E F G H$, in quo consistit. & erigatur ab unoquoque triangulorum $E O F$ $F P G$ $G R H$ $H S E$ pyramis eundem verticem habens quem conus. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidium portionis conī, quæ est ad ipsam. secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem quem conus, atque hoc semper facientes, ^a tandem relinquemus quasdam conī portiones quæ minores erunt excessu quo conus $E F G H N$ ipsum x solidum superat. relinquuntur, & sint quæ in ipsis $E O O F F P P G G R R H H S S E$. reliqua igitur pyramis cujus basis quidem polygonum

$E O F P$

EOFPGRHS, vertex autem N punctum, major est solido x. describatur etiam in circulo ABCD, polygono EOFPGRHS simile & similiter positum polygonum ATBYCVDQ: à quo erigatur pyramis eundem verticem habens quem conus: & triangulorum continentium pyramidem cujus basis quidem est polygonum ATBYCVDQ, vertex autem punctum L, unum sit LBT; triangulorum vero continentium pyramidem cujus basis EOFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, unum sit NFO: & jungantur KT MO. quoniam igitur conus ABCDL similis est cono EFGHN, erit ^b ut BD ad FH, ita KL axis ad axem MN, ut autem BD ad FH, ^e ita BK ad FM. itaque ut BK ad FM ita KL ad MN: & permutando ut BK ad KL, ita FM ad MN. & cum perpendicularis utraque est, & circa æquales angulos BKL FMN latera sunt proportionalia: simile igitur ^d est BKL triangulum triangulo FMN. Rursus quoniam est ut BK ad KT, ita FM ad MO, & circa æquales angulos BKT FMO latera sunt proportionalia; etenim quæ pars est angulus BKT quatuor rectorum qui sunt ad K centrum, eadem est pars & angulus FMO quatuor rectorum qui sunt ad centrum M: erit ^b triangulum BKT triangulo FMO simile. & quoniam ostensum est ut BK ad KL, ita esse FM ad MN; æqualis autem est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit ut TK ad KL, ita OM ad MN: & circa æquales angulos TKL OMN latera sunt proportionalia; recti enim sunt: triangulum igitur LKT simile est triangulo MNO. quod cum ob similitudinem triangulorum BKL FMN, sit ut LB ad BK, ita NF ad FM; ob similitudinem vero triangulorum BKT FMO, ut KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali ut LB ad BT, ita NF ad FO. rursus cum ob similitudinem triangulorum LTK NOM, sit ut LT ad TK, ita NO ad OM; & ob similitudinem triangulorum KBT OMF, ut KT ad TB, ita MO ad OF: ex æquali erit ut LT ad TB, ita NO ad OF. ostensum autem est & ut TB ad BL, ita OF ad FN. quare rursus ex æquali ut TL ad LB, ita ON ad NF. triangulorum igitur LTB NOF proportionalia sunt latera, ideoque æquiangularia sunt LTB NOF trianglera, & inter se ^e similia. quare & pyramis cujus basis triangulum BKT, vertex autem L punctum, similis est pyramidi cujus basis FMO triangulum, & vertex punctum N; similibus enim planis continentur, & multitudine æqualibus. pyramides autem similes, & quæ triangulares bases habent, in ^f triplicata sunt proportionem homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplicatam habet proportionem ejus quam BK habet ad FM. similiter à punctis quidem A Q D V C Y ad K, à punctis vero E S H R G P ad M ducentes rectas lineas

^b 24. Def. undecimi.
^c 15. quinti.

^d 6. sexti.

^e 5. sexti.

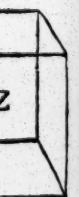
^f 8. hujus.

ata pro-

dem cir-
& axes
ujus ba-
conum
um, tri-
ad FH.
HN tri-
a, habe-

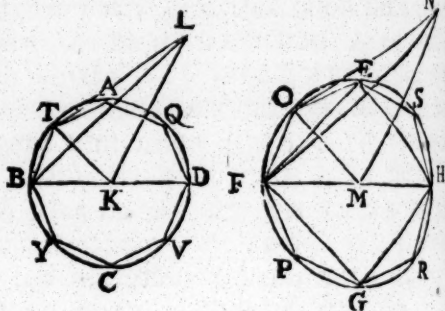


à qua-
pyramis

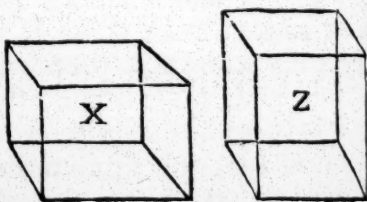


& eri-
HSE
ergo &
midium
reliquas
ab uno-
habentes
tandem
s erunt
rat. re-
RHS
gonum
EOFP-

lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eisdem habentes quos coni, ostendemus & unamquamque pyramidum ejusdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam proportionem habere ejus quam habet BK latus ad homologum latus MF, hoc est quam BD ad FH. sed ut unum antecedentium g ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur & ut BKT L pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad totum pyramidem cujus basis polygonum EOFPG-RHS, & vertex punctum N. quare & pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum



EOFPG-RHS, & vertex punctum N, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. ponitur autem conus cujus basis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad solidum x triplicatam proportionem habere ejus quam BD ad FH. ut igitur conus cujus basis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad solidum x, ita est pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum EOFPG-RHS, & vertex punctum N. dictus autem conus major est pyramide quæ in ipso; etenim eam comprehendit. majus igitur est & solidum x pyramide cujus basis polygonum EOFPG-RHS, vertex autem punctum N. sed & minus. quod fieri non potest. non igitur conus cujus basis ABCD circulus, & vertex punctum L, ad aliquod solidum minus cono cujus basis circulus EFGH, & vertex N punctum, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. similiter demonstrabimus neque conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL triplicatam proportionem habere ejus quam habet FH ad BD, itaque dico neque ABCDL conum ad solidum majus cono EFGHN triplicatam habere proportionem ejus quam BD habet ad FH. Si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit z. in-



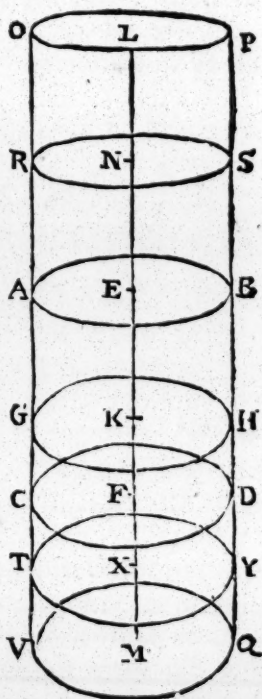
vertendo

vertendo igitur, solidum Z ad conum $ABCDL$ triplicatam proportionem habet ejus quam FH ad BD . cum autem est solidum Z majus cono $EFGHN$; erit ut solidum Z ad conum $ABCDL$, ita $EFGHN$ conus ad aliquod solidum minus cono $ABCDL$. ergo & conus $EFGHN$ ad solidum aliquod minus cono $ABCDL$ triplicatam proportionem habebit ejus quam FH habet ad BD , quod fieri non posse demonstratum est. non igitur $ABCDL$ conus ad solidum aliquod majus cono $EFGHN$, triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH . ostensum autem est neque ad minus. quare conus $ABCDL$ ad $EFGHN$ conum triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH . ut autem conus ad conum, ita h cylindrus ad cylindrum. cylindrus enim in eadem existens basi in qua conus, & ipsi æque altus, conus i triplus est, cum i 10. hujus ostensum sit, omnem conum tertiam partem esse cylindri eandem quam ipse basim habentis, & æqualem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplicatam proportionem habebit ejus quam BD habet ad FH . Similes igitur conus & cylindri inter se sunt in triplicata proportionem diametrorum quæ sunt in basibus. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

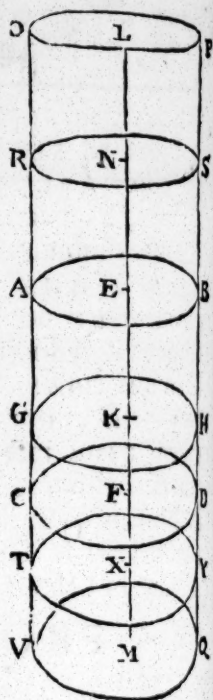
Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB CD parallelo, & occurrat axi EF in K puncto. dico ut BG cylindrus ad cylindrum GD , ita esse EK axem ad axem KF . Producat enim EF axis ex utraque parte ad puncta L , M : & ipsi quidem EK axi ponantur æquales quotcunque EN NL ; ipsi vero FK æquales quotcunque FX XM : & per puncta L N X M ducantur plana ipsis AB , CD parallela: atque in planis per L N X M circa centra L N X M intelligantur circuli $OPRS$ $TYVQ$ æquales ipsi AB CD ; & cylindri PR RB DT TQ intelligantur. quoniam igitur axes LN NE EK inter se sunt æquales, erunt cylindri PR RB BG inter se æquales. æquales autem sunt bases. ergo & cylindri PR RB BG sunt æquales. quod cum axes LN NE EK inter se



11. hujus.

se æquales sint, itemque cylindri PR RB BG inter se æquales; sitque ipsorum LN NE EK multitudo æqualis multitudini ipsorum PR RB BG : quotuplex est axis KL ipsius EK axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GE . eadem ratione & quotuplex est MK axis ipsius axis KF , totuplex est & QG cylindrus cylindri GD . & si quidem axis KL sit æqualis axi KM , erit & PF cylindrus cylindro GQ æqualis; si autem axis LX major sit axe KM , & cylindrus PG major erit cylindro GQ ; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, videlicet axibus EK KF , & cylindris BG GD , sumpta sunt æque multiplicia, axis quidem EK , & BG cylindri, nempe axis KL , & cylindrus PG ; axis vero KF , & cylindri GD æque multiplicia, axis scilicet KM , & GQ cylindrus: & demonstratum est si LK axis superat axem KM , & PG cylindrum superare cylindrum GQ ; & si æqualis æqualem; & si minor minorem. est igitur axis EX ad axem KF , ut BG cylindrus ad cylindrum GD . Quare si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod demonstrare oportebat.

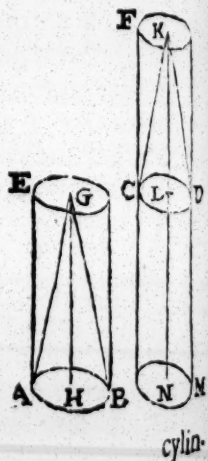


b 5. Def. quinti.

PROP. XIV. THEOR.

In æqualibus basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt ut altitudines.

Sint enim in æqualibus basibus AB CD , cylindri EB FD . dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD , ita esse GH axem ad axem KL . Producatur enim KL axis ad punctum N , ponaturque ipsi GH axi æqualis LN ; & circa axem LN intelligatur cylindrus CM , quoniam igitur cylindri EB CM eandem habent altitudinem, inter se ^a sunt ut bases. bases autem sunt æquales. ergo & cylindri EB CM inter se æquales erunt. & quoniam cylindrus FM secatur plano CD ,
^a 11. hujus. oppositis planis parallelo, erit ^b ut CM



b 13. hujus.

cylind.

cylindrus ad cylindrum FD , ita axis LN ad KL axem. æqualis autem est cylindrus quidem CM cylindro EB ; axis vero LN axi GH . est igitur ut EB cylindrus ad cylindrum FD , ita axis GH ad KL axem. ut autem EB cylindrus ad cylindrum FD , ita ABG conus ad conum CDK ; cylindri sunt enim conorum d tripli. ergo & ut GH axis ad axem KL , ita est ABG conus ad conum CDK , & cylindrus EB ad FD cylindrum. In basibus igitur æqualibus existentes coni & cylindri, inter se sunt ut altitudines. Quod demonstrare oportebat.

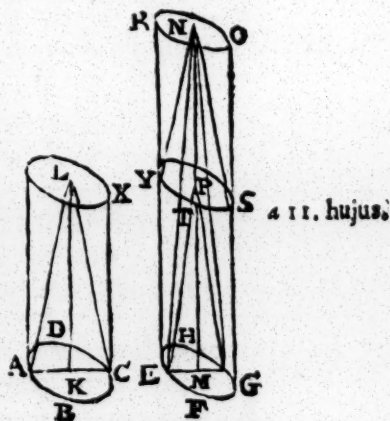
PROP. XV. THEOR.

Equalium conorum & cylindrorum bases & altitudines reciproce sunt proportionales; & quorum conorum & cylindrorum bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illi inter se sunt æquales.

Sint æquales coni & cylindri, quorum bases quidem $AB C D E F G H$ circuli, & diametri ipsorum $A C E G$; axes autem $K L M N$; qui quidem & conorum vel cylindrorum sunt altitudines: & compleantur cylindri $A X E O$. dico cylindrorum $A X E O$ bases & altitudines reciproce proportionales esse, hoc est, ut $A B C D$ basis ad basim $E F G H$, ita esse altitudinem $M N$ ad altitudinem $K L$.

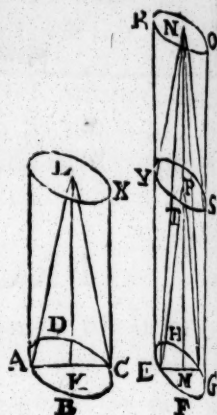
altitudo enim $K L$ vel æqualis est altitudini $M N$, vel non æqualis. Sit primo æqualis. atque est $A X$ cylindrus æqualis cylindro $E G$. qui autem eandem habent altitudinem coni & cylindri inter se sunt a ut bases. æqualis igitur est basis $A B C D$ basi $E F G H$. est igitur ut basis $A B C D$ ad $E F G H$ basim, ita $M N$ altitudo ad altitudinem $K L$. non fit autem altitudo $K L$ altitudini $M N$ æqualis, sed major sit $M N$, & auferatur, ab ipsa $M N$ altitudini $L K$ æqualis $P M$,

& per P secetur $E O$ cylindrus plano $T Y S$ oppositis planis circulorum $E F G H R O$ parallelo, intelligaturque cylindrus $E S$ cujus basis quidem $E F G H$ circulus, altitudo autem $P M$. quoniam igitur $A X$ cylindrus æqualis est cylindro $E O$, alius autem aliquis est cylindrus $E S$; erit ut $A X$ cylindrus ad cylindrum $E S$, ita cylindrus $E O$ ad $E S$ cylindrum. sed ut $A X$ cylindrus ad cylindrum $E S$, a ita basis $A B C D$ ad $E F G H$ basim; cylindri enim $A X E S$ eandem habent altitudinem: ut autem cylindrus $E O$ ad $E S$ cylindrum



a 11. hujus.

^b 13. hujus. drum ^b, ita MN altitudo ad altitudinem MP ; nam cylindrus EO secatur plano TYS , oppositis planis parallelo. est igitur ut $ABCD$ basis ad basim $EFGH$, ita altitudo MN ad MP altitudinem. æqualis autem est MP altitudo altitudini KL . quare ut basis $ABCD$ ad $EFGH$ basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL . æqualium igitur cylindrorum $AXEO$ bases & altitudines reciproce sunt proportionales.

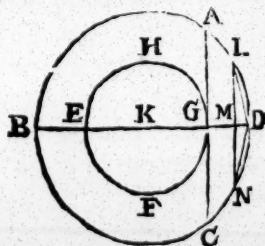


Sed si cylindrorum $AXEO$ bases & altitudines sunt reciproce proportionales: hoc est, ut $ABCD$ basis ad basim $EFGH$, ita altitudo MN ad KL altitudinem. dico AX cylindrum cylindro EO æqualem esse. Iisdem enim constructis; quoniam ut $ABCD$ basis ad basim $EFGH$, ita altitudo MN ad KL altitudinem; altitudo autem KL æqualis est altitudini MP : erit ut $ABCD$ basis ad basim $EFGH$, ita MN altitudo ad altitudinem MP .
^c 11. hujus. sed ut $ABCD$ basis ad basim $EFGH$, ^c ita AX cylindrus ad cylindrum ES ; eandem enim habent altitudinem: ut autem MN altitudo ad altitudinem MP , ita ^b cylindrus EO ad ES cylindrum. est igitur ut AX cylindrus ad cylindrum ES , ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO est ^d æqualis. similiter autem & in conis. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Duobus circulis circa idem centrum exstentibus, in majori polygonum æqualium & numero parium laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli $ABCD EFGH$ circa idem centrum K . oportet in majori circulo $ABCD$ polygonum æqualium & numero parium laterum describere, non tangens minorem circulum $EFGH$. Ducatur per K centrum recta linea BD , atque à puncto G ipsi BD ad rectos angulos ducatur AG , & ad C producat, quæ ^a 16. tertii. AC circulum $EFGH$ ^a tanget.



Itaque circumferentiam BAD bifariam secantes, & ejus dimidium rursus bifariam, & hoc semper facientes, ^b tandem relinquemus

^b Lemma hujus.

linquemus circumferentiam minorem ipsa AD. relinquatur sitque LD; & à puncto L ad BD perpendicularis agatur LM, ^{c 12. primi.} & ad N producat; junganturque LD DN. ergo LD ipsi DN est ^d æqualis, & quoniam LN parallela est AC, & AC ^{d 3. & 29.} tangit circumulum EFGH; ipsa LN circumulum EFGH non tangit. & multo minus tangens circumulum EFGH rectæ lineæ LD DN. quod si ipsi LD æquales deinceps circulo ABCD aptabimus, describetur in eo polygonum æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circumulum EFGH. Quod facere oportebat.

PROP. XVII. PROBL.

Duabus sphaëris circa idem centrum existentibus, in majori solidum polyhedrum describere, quod minoris sphaëre superficiem non tangat.

Intelligentur duæ sphaëre circa idem centrum A. oportet in majori sphaëra describere solidum polyhedrum minoris sphaëre superficiem non tangens. Secentur sphaëre plano aliquo per centrum ducto: sectiones erunt circuli; quoniam diametro manente & semicirculo circumducto sphaëra facta est: ergo in quacunque positione semicirculum intelligamus, quod per ipsum producit planum in superficie sphaëre circumulum efficiet; & constat circumulum esse maximum, cum diameter sphaëre quæ & semicirculi diameter est, major ^b sit omnibus rectis lineis quæ in circulo vel sphaëra ducuntur. sit igitur in majori quidem sphaëra circumulus BCDE, in minori autem circumulus FGH; & ducantur ipsorum duæ diametri ad rectos inter se angulos BD CE. occurrat BD minori circulo in G; ducatur à puncto G ipsi AG ad rectos angulos GL, & jungatur AL. itaque circumferentiam EB bifariam secantes, & dimidium ipsius bifariam, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem ea parte circumferentiæ circuli BCD, quæ subtenditur à recta æquali ipsi GL. relinquatur, sitque circumferentia BK. minor igitur est recta BK quam GL; eritque BK latus polygoni æqualium & parium numero laterum non tangens minorem circumulum. sint igitur polygoni latera in quadrante circuli BE, rectæ BK KL LM ME; & puncta K A producantur ad N: & à puncto A plano circuli BCDE ad rectos angulos constituitur AX, quæ superficiei sphaëre in puncto X occurrat, & per AX & utramque ipsarum BD KN plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in superficie sphaëre maximos circulos. itaque efficiant, & sint in diametris BD

P

KN

^a Def. 14.
undecimi.

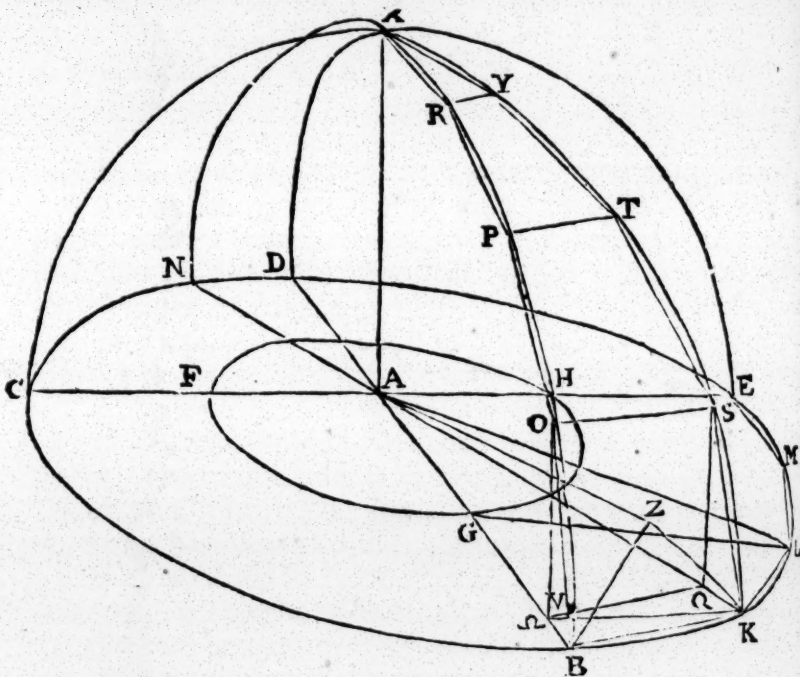
^b 15. tertii.

^c 12. undecimi.

d 18. undecimi.

e 38. undecimi.

KN eorum semicirculi BXD KXN. quoniam igitur XA recta est ad planum circuli BCDE, erunt omnia plana quæ per ipsam XA transeunt, ad idem circuli planum *d* recta: quare & semicirculi BXD KXN recti sunt ad idem planum. & quoniam semicirculi BED BXD KXN æquales sunt in æqualibus enim consistunt BD KN diametris; erunt & eorum quadrantes BE BX KX inter se æquales. quot igitur latera polygoni sunt in quadrante BE, tot erunt & in quadrantibus BX KX, æqualia ipsis BK KL LM ME. describantur, & sint BO OP PR RX, KS ST TY YX: jungantur. que SO TP YR; & ab ipsis OS ad planum circuli BCDE perpendiculares ducantur. cadent hæ in *e* communes plano-



rum sectiones BD KN, quoniam & plana semicirculorum BXD KXN ad planum circuli BCDE recta sunt. itaque cadant, sintque OV SQ, & VQ jungatur. cum igitur in æqualibus semicirculis BXD KXN, æquales circumferentiæ sumptæ sint BO KS, & ductæ perpendiculares OV SQ, erit OV quidem ipsi SQ æqualis, BV vero æqualis KQ. est autem & tota BA æqualis toti KA. ergo & reliqua VA reliquæ QA est æqualis. igitur ut BV ad VA, ita KQ ad QA: ideoque VQ ipsi BK parallela *f* est. quod cum utraque ipsarum OV SQ recta sit ad circuli BCDE planum, erit



f 2. sexti.

M

XA recta
quæ per
ta: quare
planum.
ales sunt
erunt &
uot igitur
in qua-
descri-
ngantur.
li BCDE
es plano.

E



ergo &
VA, ita
od cum
planum,
erit

erit ov ipsi SO parallela. ostensa autem est & ipsi æqua-^{g 6. unde-}
lis. ergo QV SO æquales ^b sunt & parallelæ. & quoniam ^{cimi.}
 QU parallela est ipsi SO , sed & parallela ipsi KB ; erit & ^{b 33. primi.}
 SO ipsi KB parallela: & ipsas conjungunt BO KS . ergo & ^{9. unde-}
 $KBOS$ quadrilaterum est in uno k plano: nam si duæ rectæ ^{cimi.}
lineæ parallelæ sint, & in utraque ipsarum quævis puncta ^{k 7. unde-}
sumantur, quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem ^{cimi.}
est plano, in quo parallelæ. & eadem ratione utraque ipso-
rum quadrilaterorum $SOPT$ $TPRY$ in uno sunt plano. est
autem in uno plano & triangulum YRX . si igitur à punctis ^{l 2. unde-}
 O S P T R Y ad A ductas rectas lineas intelligamus, con- ^{cimi.}
stituetur quædam figura solida polyhedra inter circumferen-
tias BX KX , ex pyramidibus, composita, quarum bases qui-
dem $KBOS$ $SOPT$ $TPRY$ quadrilatera, & triangulum
 YRX ; vertex autem punctum A . quod si in unoquoque la-
terum KL LM ME , quemadmodum in KB eadem construa-
mus, & in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo he-
misphærio, constituetur figura quædam polyhedra in sphæra
descripta, & composita ex pyramidibus, quarum bases sunt
quadrilatera jam dicta, & YRX triangulum, & quæ ejus-
dem ordinis sunt, vertex autem A punctum. dico dictam
figuram polyhedram non tangere superficiem minoris sphæ-
ræ, in qua est circulus FGH . Ducatur à m puncto A ad pla-^{m 11. unde-}
num quadrilateri $KBOS$ perpendicularis AZ , cui in puncto ^{cimi.}
 Z occurrat, & BZ ZK jungantur. itaque quoniam AZ recta
est ad quadrilateri $KBOS$ planum, & ad omnes rectas li-
neas, quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano ^{n 3. Def.}
angulos faciet. ergo AZ ad utramque ipsarum BZ ZK est ^{undecimi.}
perpendicularis. & quoniam AB est æqualis AK , erit &
quadratum ex AB quadrato ex AK æquale: & sunt quadrato
quidem ex AB æqualia ^o quadrata ex AZ ZB , angulus ^{o 47. primi.}
enim ad Z rectus est; quadrato autem ex AK æqualia ex
 AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis ex
 AZ ZK æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex AZ .
reliquum igitur quod ex BZ reliquo quod ex ZK est æqua-
le: ergo recta BZ rectæ ZK æqualis. Similiter ostendemus,
& quæ à puncto Z ad puncta O S ducuntur utrique ipsa-
rum BZ ZK æquales esse. circulus igitur centro Z & inter-
vallo una ipsarum ZB ZK descriptus etiam per puncta O S
transibit. & quoniam in circulo est BKS quadrilaterum, &
sunt æquales OB BK KS & minor OS , erit angulus BZK
obtusius; ideoque BK major quam BZ . sed & GL quam BK
est major multo. igitur major est GL quam BZ . & qua-
dratum ex GL quadrato ex BZ majus. & cum æqualis AL
ipsi AB , erit quadratum ex AL quadrato ex AB æquale:

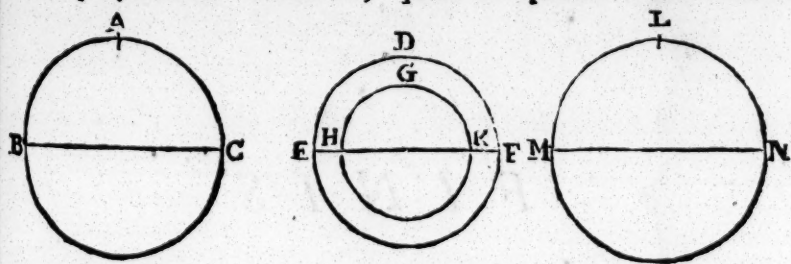
homologum latus; hoc est, quam habet AB ex centro sphæræ circa centrum A existentis, ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ. similiter & unaquæque pyramis earum, quæ sunt in sphæræ circa centrum A , ad unamquamque pyramidum ejusdem ordinis, quæ sunt in altera sphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet AB ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ. Et ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. quare totum solidum polyhedrum, quod est in sphæra circa centrum A , ad totum solidum polyhedrum, quod in altera sphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet AB ad eam quæ est ex centro alterius sphæræ, hoc est, quam habet BD diameter ad alterius sphæræ diametrum.

PROP. XVIII. THEOR.

Sphæræ inter se in triplicata sunt proportionem suarum diametrorum.

Intelligentur sphæræ ABC DEF ; quarum diametri BC EF . dico ABC sphæram ad sphæram DEF triplicatam proportionem habere ejus, quam habet BC ad EF . Si enim non ita est, sphæra ABC ad sphæram minorem ipsa DEF , vel ad majorem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet BC ad EF . Habeat primo ad minorem, videlicet ad GHK . & intelligatur sphæra DEF circa idem centrum, circa quod sphæra GHK : describaturque in majori sphæra DEF solidum polyhedrum non tangens ^a minorem sphæram GHK in superficie; & in sphæra ABC describatur solidum polyhedrum simile ei, quod in sphæra DEF descri-

^a 17. hujus.



ptum est. solidum igitur polyhedrum, quod in sphæra ABC , ad solidum polyhedrum, quod in sphæra DEF , triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF . habet autem ABC sphæra ad sphæram GHK triplicatam proportionem ejus, quam BC ad EF . ergo ut ABC sphæra ad sphæram GHK , ita solidum polyhedrum in sphæra ABC ad solidum polyhedrum in sphæra DEF ; & permutando, ut ABC

^b Cor. antecedente.

sphæra ad solidum polyhedrum, quod in ipsa est, ita $G H K$ sphæra ad solidum polyhedrum, quod in sphæra DEF . major autem est sphæra ABC solido polyhedro, quod est in ipsa. ergo & $G H K$ sphæra polyhedro, quod in sphæra DEF , est major. sed & minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. non igitur ABC sphæra ad sphæram minorem ipsa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF . similiter ostendemus neque DEF sphæram ad sphæram minorem ipsa ABC triplicatam habere proportionem ejus, quam habet EF ad BC . dico insuper sphæram ABC neque ad majorem sphæram ipsa DEF triplicatam proportionem habere ejus, quam BC ad EF . Si enim fieri potest, habet ad majorem LMN . invertendo igitur, sphæra LMN ad ABC sphæram triplicatam proportionem habet ejus, quam diameter EF ad BC diametrum. ut autem sphæra LMN ad ABC sphæram, ita sphæra DEF ad sphæram quandam minorem ipsa ABC , quoniam sphæra LMN major est ipsa DEF . ergo & DEF sphæra ad sphæram minorem ipsa ABC triplicatam proportionem habet ejus, quam EF ad BC ; quod fieri non posse ostensum est. non igitur ABC sphæra ad sphæram majorem ipsa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF . ostensum autem est neque ad minorem. ergo ABC sphæra ad sphæram DEF triplicatam proportionem habebit ejus, quam BC ad EF . Quod demonstrare oportebat.



F I N I S.

LIBRI *Venales apud* Richardum Clements
Bibliopolam Oxoniensem.

Rogeri Aschami Epistolarum Libri Quatuor cui accessit Joannis Saturnii aliorumque ad Aschamum Angloſque Eruditos Epistolarum Liber unus 8vo. Oxoniæ 1703.

Spicilegium SS. Patrum ut & Hæreticorum Seculi post Christum Natum 1. 2. 3. Cura Joannis Ernesti Grabii Editio Altera Auctior 2 vol. 8vo. Oxon. 1714.

M. Fab. Quintilliani Declamationum Liber 8vo. 1692.

C. Suetonii Tranquilli opera omnia notis Illustrata Oxonii. 1676.

Theodosii Sphæricorum Libri Tres. G. Lat. 8vo. Oxon. 1707.

Græcæ Linguæ Dialecti. in usum Scholæ Westmonasteriensis Opera ac studio Mich. Maittaire A. M. Londini 1712. 8vo.

Caspari Bartholini Sprcimen Philosophiæ Naturalis accedit de Fontium Fluviorumque Origine 12mo. 1713.

Smith Aditus ad Logicam, & Elementa Logicæ Oxoniæ 1694.

Liberti Fromondi Meterrologicorum Libri sex Londini 1670.

DuTrieu manuſcriptio ad Logicam Oxoniæ 8vo. 1678.
Mocket de Politia Ecclesiæ Anglicanæ. Londini 1705.

1881

1882

1883

1884

1885

1886

1887

1888

1889

1890

TRIGONOMETRIÆ

Planæ & Sphæricæ

E L E M E N T A.

I T E M

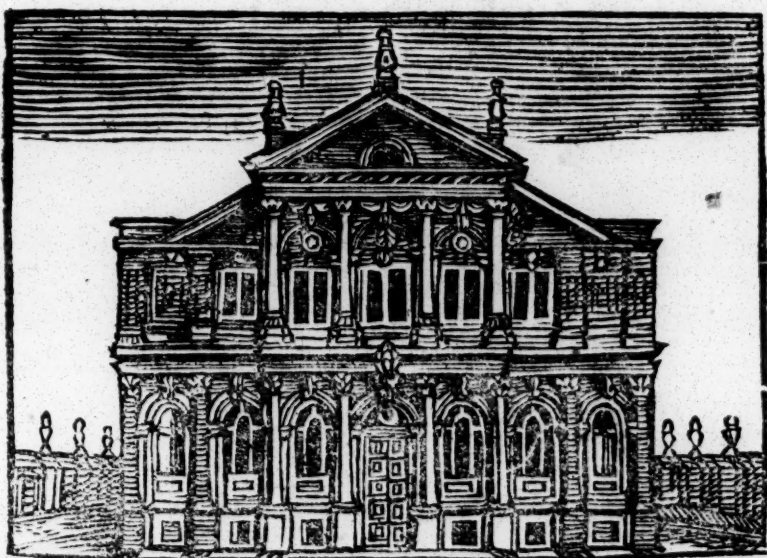
D E N A T U R A

E T

A R I T H M E T I C A

L O G A R I T H M O R U M

T R A C T A T U S B R E V I S.



O X O N I Æ,

E T H E A T R O S H E L D O N I A N O.

Impensis *Rich. Clements* Bibliop. *Oxonienfis*. 1723.



TR

E

E

cesse e
dæ. l
partes

Pla

circu

& u

fingv

in 6

lus q

fun

C

sexa

non

caro

circ

fur

100

m

TRIGONOMETRIÆ

Planæ & Sphæricæ

E L E M E N T A.

DEFINITIONES.

EX datis Trianguli lateribus angulos, & ex angulis latera laterumve rationes, & mixtim assequi, Trigonometriæ munus est. Ad quod præstandum, necesse est, ut non tantum Peripheriæ circulares, sed & rectæ lineæ circulis adscriptæ, in notas aliquot & certas partes secari supponantur.

Placuit itaque Veteribus Mathematicis, peripheriam circuli in 360 partes (quos gradus appellant) dividere ; & unumquemque gradum in 60 minuta prima, & hæc singula in 60 secunda, & rursus horum unumquodque in 60 minuta Tertia, & ita continuo partiri. Et angulus quilibet dicitur esse tot graduum & minutorum, quot sunt in arcu qui angulum illum metitur.

Quidam gradum in partes centesimas, potius quam sexagesimas partiri volunt : & utilius fortasse esset, non gradus sed & ipsum circulum in decupla ratione secare ; quæ divisio forsan aliquando obtinebit. Verum si circulus constet 360 gradibus, ejus quadrans quæ est mensura anguli recti, erit harum partium 90. Si circulus in 100 partes secetur, Quadrans erit 25 partium.

Complementum Arcus, est differentia ejus à Quadrante.

Chorda five *subtensa* est recta linea ab uno Arcus termino ad alterum ducta.

loco ponitur, & in partes 10 000 000 vel plures decimales dividi intelligitur. Adeo ut ope hujus Tabulæ, cujuslibet Arcûs vel anguli sinus Tangens vel secans haberi potest, Et vicissim ex dato sinu Tangente vel secante dabitur qui iis respondet arcus vel angulus. Observandum est in sequentibus R esse notam Radii, S notam sinus, coS cosinus, T notam Tangentis, & coT coTangentis.

CONSTRUCTIO CANONIS.

PROP. I. THEOREMA.

Datis duobus quibuscumque Trianguli rectanguli lateribus, reliquum quoque dabitur.

Vide figuram propositionis tertiæ.

Est enim per 47 Elementi primi $ACq = ABq + BCq$ & $ACq - BCq = ABq$, & vicissim $ACq - ABq = BCq$. unde per extractionem Radicis quadratæ, dabitur $AC = \sqrt{ABq + BCq}$ & $AB = \sqrt{ACq - BCq}$ & $BC = \sqrt{ACq - ABq}$.

PROP. II. PROBL.

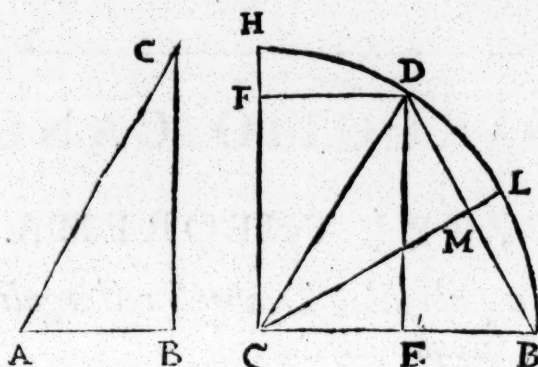
Dato DE sinu arcus DB. Invenire Cosinum DF.

Ex datis CD radio & DE sinu, in Triangulo rectangulo CDE dabitur per præcedentem $CE = \sqrt{CEq - DEq} = DF$.

PROP. III. PROBL.

Dato DE sinu arcus cujuscvis DB. Invenire DM & BM sinum arcus dimidii.

Dato DE dabitur per præcedentem CE, ac proinde EB quæ est differentia inter cosinum & Radium. In Tri-



angulo igitur rectangulo DBE datis DE & EB dabitur DB cujus semiffis DM est sinus arcus $DL = \frac{1}{2}$ arcus DB.

PROP. IV. PROBL.

Dato BM sinu arcus BL invenire sinum dupli Arcus.

Dato BM sinu, dabitur per Prop. 2. cosinus CM. Sunt autem Triangula CBM DBE æquiangula, ob angulos ad E & M rectos & angulum ad B communem, quare (per 4. 6.) erit $CB:CM::BD$ vel $2BM:DE$. Unde cum dantur tres priores hujus Analogiæ termini, quartus quoque qui est sinus arcus DB innotescet.

Corol. Est $CB:2CM::BD:2DE$, hoc est, Radius ad duplum cosinus arcus $\frac{1}{2}$ DB ut subtensa arcus DB ad subtensam dupli arcus. Item est $CB:2CM::(2BM:2DE::)BM:DE::\frac{1}{2}CB:CM$. unde dato sinu arcus alicujus & sinu arcus dupli, dabitur cosinus arcus simpli.

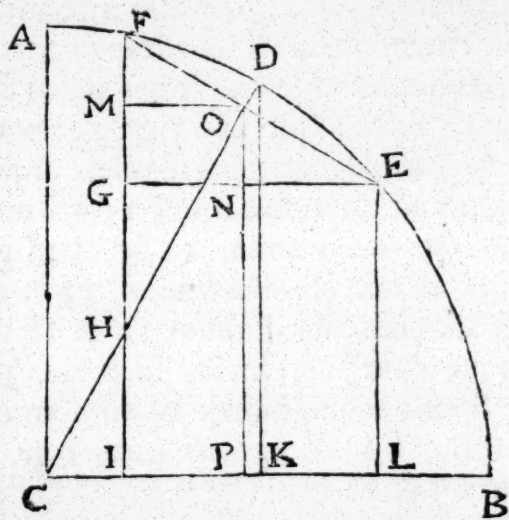
PROP.

PROP. V.

Datis sinibus duorum arcuum BD FD, Invenire FI sinum summæ arcuum, Item EL sinum differentiæ eorundem.

Ducatur Radius CD, & fit CO cosinus arcus FD, qui proinde dabitur, per O agatur OP parallela ad DK. Item trahantur OM GE parallelæ ad CB. Et ob æquiangularia triangula CDK COP CHI FOH FOM. Est primo $CD:DK::CO$.

OP, quæ itaque innotescet. Item est $CD:CK::FO:FM$, adeoque & illa nota erit. sed ob $FO=EO$ erit $FM=MG=ON$. Est itaque $OP+FM=FI$ sinui summæ arcuum & $OP-FM$, hoc est, $OP-ON=EL$ sinui differentiæ arcuum. Q. E. I.



Coroll. Quia arcuum BE BD BF differentiæ sunt æquales, Erit BD arcus, medius arithmeticus inter arcus BE BF.

PROP. VI.

Iisdem positis, Radius est ad duplum cosinus arcus medii, ut sinus differentiæ ad differentiam sinuum extremorum.

Nam est $CD:CK::FO:FM$, unde duplicando consequentes $CD:2CK::FO:2FM$ vel ad FG; quæ est differentia sinuum EL FI. Q. E. D.

Cor. 1. Si arcus BD sit 60 grad. Erit differentia sinuum FI EL æqualis FO sinui distantiae. Nam in eo casu fit CK sinus 30 grad. cujus duplum æquale est radio, adeoque

8 TRIGONOMETRIÆ PLANÆ

adeoque ob $CD = 2CK$ erit $FO = FG$. Adeoque si duo arcus BE BF ab arcu 60 gr. æquidistant, erit differentia sinuum æqualis sinui distantiae FD .

Cor. 2. Hinc si dentur sinus omnium arcuum, dato intervallo à se invicem distantium ab initio quadrantis usque ad 60 gradus, facile inveniuntur reliqui per unicam additionem. Est enim sinus 61 gr. = sinui 59 gr. + sin 1 gr. & sinus 62 gr. = sinui 58 gr. + sin 2 gr. Item sinus 63 gr. = sinui 57 gr. + sin 3 gr. & ita deinceps.

Cor. 3. Si habeantur sinus omnium arcuum ab initio quadrantis, dato intervallo à se invicem distantium, usque ad datam quamvis quadrantis partem, dabuntur exinde sinus omnes usque ad hujus partis duplum. *ex. g.* Dentur omnes sinus usque ad 15 gr. per præcedentem Analogiam inveniri possunt sinus omnes usque ad 30 gr. Nam est radius ad duplum cosinus 15 gr. ut sinus unius gradus ad differentiam sinuum 14 gr. & 16 gr. ita etiam est sinus 2 gr. ad differentiam sinuum 13 & 17 gr. & ita sinus 3 gr. ad differentiam sinuum 12 & 18 gr. atque sic continuo usque dum pervenietur ad sinum 30 gr.

Similiter ut Radius ad duplum cosinus 30 gr. seu ad duplum sinus 60 gr. ita sinus 1 gr. ad differentiam sinuum 29 & 31 gr. :: sin 2 gr. ad Differentiam sinuum 28 & 32 gr. :: 3 gr. ad differentiam sinuum 27 & 33 gr. sed in hoc casu est Radius ad duplum cosinus 30 gr. ut 1 ad $\sqrt{3}$. ac proinde si multiplicentur sinus distantiarum ab arcu 30 gr. per $\sqrt{3}$ dabuntur differentiae sinuum.

Similiter in ipso initio quadrantis minutim exquirere possumus sinus, datis sinibus & cosinibus unius & duorum minutorum. Nam ut Radius ad duplum cosinus $2'$:: sin $1'$: differentiam sinuum $1'$ & $3'$:: Sin $2'$: differentiam sinuum $0'$ & $4'$ hoc est, ad ipsum sinum $4'$. Et similiter ex datis sinibus priorum $4'$ inveniuntur sinus reliqui usque ad $8'$ & exinde ad $16'$ & ita deinceps.

P R O P.

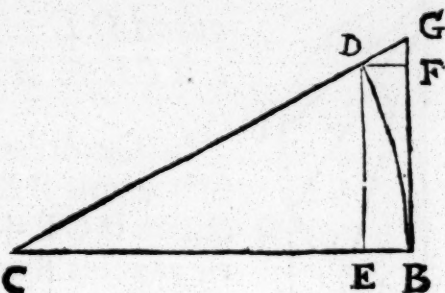
PROP. VII. THEOREMA.

In arcubus exiguis sinus & Tangens ejusdem arcus sunt quam proxime ad se invicem, in ratione aequalitatis.

Nam ob æquiangula triangula CED CBG, erit CE: CB:: ED: BG. sed accedente puncto D ad B, evanescit EB respectu arcus BD: unde fit CE fere æqualis CB. adeoque & ED fere æqualis BG. Si EB fit minor radii parte

$\frac{1}{10\ 000\ 000}$ erit differentia

inter sinum & tangen-



tem, minor quoque tangentis parte $\frac{1}{10\ 000\ 000}$.

Cor. Cum Arcus sit tangente minor, sinu autem suo major; & exigui arcus sinus & tangens sunt fere æquales, erit etiam arcus suo sinui vel tangenti fere æqualis, Adeoque in exiguis arcubus, erit ut arcus ad arcum ita sinus ad sinum.

PROP. VIII.

Invenire sinum Arcus unius minuti.

Latus Hexagoni circulo inscripti, hoc est, subtenfa 60 graduum æqualis est Radio, (per 15^{tam} 4^{ti}.) Radii itaque semissis erit sinus Arcus 30 gr. Dato itaque sinu Arcus 30 grad. invenitur sinus arcus 15 gr., (per 3^{tiam} hujus.) Item ex dato sinu 15 gr. per eandem invenitur sinus 7 gr. 30 min. & sinus hujus dimidii 3 gr. 45' similiter invenitur; & ita deinceps, donec duodecima peracta bisectione, perveniatur ad arcum 52" 44" 3" 45" cujus cosinus fere æqualis est radio, in quo casu (uti constat ex prop. 7.) sunt sinus arcubus suis proportionales; adeoque ut arcus 52" 44" 3" 45" ad arcum unius minuti ita erit

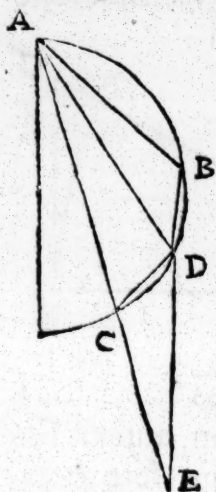
10 TRIGONOMETRIÆ PLANÆ

erit sinus prius inventus ad sinum arcus unius minuti, qui igitur dabitur.

Dato sinu unius minuti, invenietur per prop. 2 & 4, sinus duorum minutorum ejusque cosinus.

PROP. IX. THEOREMA.

Si angulus BAC in peripheria circuli existens, bisectetur recta AD, Et producatur AC quoad DE = AD ipsi occurrat in E: erit CE = AB.



In Quadrilatero ABDC (per 22. 3.) sunt anguli B & ACD æquales duobus rectis = DCE + DCA (per 13. 1.) unde erit angulus B = DCE. Quin etiam est angulus E = DAC (per 5. 1.) = DAB & est DC = DB. quare Triangula BAD & CED sunt congrua & CE est æqualis AB. Q. E. D.

PROP. X. THEOREMA.

Sint arcus AB BC CD DE EF &c. æquales; Arcuumque AB AC AD AE &c. subtensæ ducantur, erit AB: AC:: AC: AB + AD:: AD: AC + AE:: AE: AD + AF:: AF: AE + AG.

Producantur AD in H, AE in I, AF in K, & AG in L, ut triangula ACH ADI AEK AFL sint Isoscelia. Et quoniam angulus BAD bisectus est, fiet DH = AB per præcedentem. Similiter erit EI = AC, FK = AD, item GL = AE.

Sed Triangula Isoscelia ABC CAH DAI FAK FAL, ob angulos ad bases æquales, sunt æquiangulara. Quare erit ut AB: AC:: AC: AH = AB + AD:: AD: AI = AC + AE:: AE: AK = AD + AF:: AF: AL = AE + AG. Q. E. D.

Corol.

Corol. Quoniam est AB ad AC ut Radius ad duplum
cosinus Arcus $\frac{1}{2}$ AB, (per corol. prop. 5.) erit quo-

que ut Radius ad du-
plum cosinus arcus $\frac{1}{2}$
AB ita $\frac{1}{2}$ AB : $\frac{1}{2}$ AC
:: $\frac{1}{2}$ AC : $\frac{1}{2}$ AB +
 $\frac{1}{2}$ AD :: $\frac{1}{2}$ AD : $\frac{1}{2}$ AC +
 $\frac{1}{2}$ AE :: $\frac{1}{2}$ AE : $\frac{1}{2}$ AD +
 $\frac{1}{2}$ AF &c. Sint jam ar-
cus AB BC CD &c.
singula 2'. Erit $\frac{1}{2}$ AB
sinus unius minuti, $\frac{1}{2}$
AC sinus 2'. $\frac{1}{2}$ AD si-
nus 3'. $\frac{1}{2}$ AF sinus 4'
&c. Unde datis sinu-
bus unius & duorum
minutorum sinus om-
nes reliqui sic facilli-
me habentur.

Dicatur cosinus ar-
cus unius minuti, hoc
est, sinus arcus 89 gr.
59' = Q & fient sequen-
tes Analogiæ, R : 2 Q

:: Sin 2' : S 1' + S 3'. quare dabitur sinus 3'. Item R :
2 Q :: S. 3' : S. 2' + S. 4'. quare dabitur S 4'.

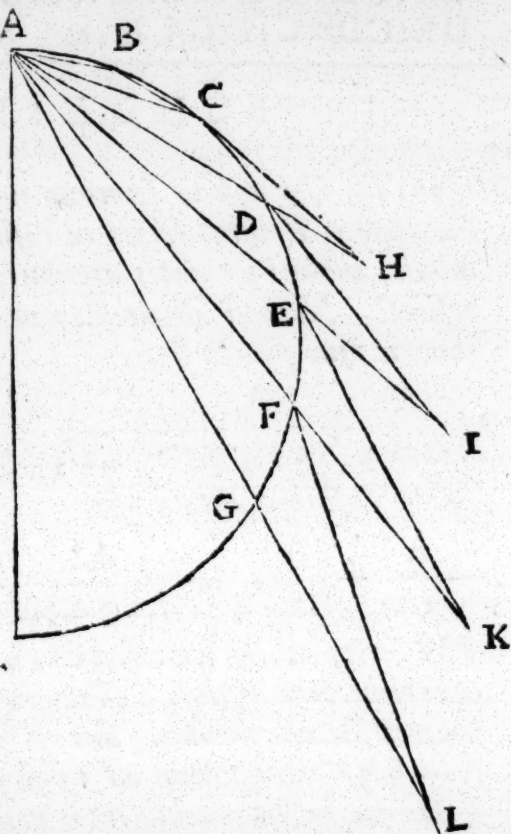
Item R : 2 Q :: S. 4' : S. 3' + S. 5'. quare habetur si-
nus 5'.

R : 2 Q :: S. 5' : S 4' + S 6' proinde dabitur S 6'. At-
que ita deinceps ad singula quadrantis minuta dabun-
tur sinus. Et quoniam Radius seu primus Analogiæ ter-
minus est Unitas ; operationes per multiplicationem con-
tractam & subductionem facillime expediuntur.

Inventis sinibus, usque ad gradum sexagesimum. Re-
liqui sinus per solam additionem habentur (per cor. 1. pr. 5.)

Datis sinibus, Tangentes & secantes ex Analogiis se-
quentibus invenire possunt. (In fig. Definitionum) ob æ-
quiangula Triangula CED CBG CHI.

CE:



12 TRIGONOMETRIÆ PLANÆ

CE:ED::CB:BG. hoc est, coS:S::R:T.

GB:BC::CH:HI. h. e. T:R::R:co T.

CE:CD::CB:CG. h. e. co S:R::R:Secant.

DE:CD::CH:CI. h. e. S:R::R:co Secant.

SCHOLIUM.

Magnus ille Geometra, summusque Philosophus Dominus Newtonus Primus series in infinitum convergentes exhibuit, quibus ex datis arcubus, eorum sinus computari possint. Nam si Arcus dicatur A & Radius sit unitas invenit ejus sinum fore.

$$A - \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^5}{1.2.3.4.5} - \frac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{A^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$$

&c. Cosinum autem esse

$$1 - \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^4}{1.2.3.4} - \frac{A^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{A^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} \&c.$$

Hæ series initio quadrantis cum Arcus A parvus est celerrime convergunt. Nam in serie pro sinu, si A non superet decem minuta, duo primi ejus termini scil. $A - \frac{1}{6}A^3$ dant sinum ad 15 figurarum loca, si Arcus A non major sit gradu, tres primi exhibent sinum ad totidem loca, adeoque pro primis & ultimis Quadrantis sinibus hæ series sunt admodum utiles. sed quo major sit arcus A, eo pluribus opus est terminis ut inveniatur sinus in numeris qui sunt veri ad datum figurarum locum. Tandem autem lentissime convergunt series cum Arcus fere æqualis est Radio. Cui rei ut remedium adferatur ego alias excogitavi series Newtonianis similes, in quibus suppono arcum cujus sinus quaeritur esse summam vel differentiam duorum arcuum scil. esse $A + z$ vel $A - z$: notosque esse sinum & cosinum arcus A. scil. sit a sinus arcus A & b ejus cosinus. Sinus Arcus $A + z$ per hanc seriem exprimetur

$$1 + \frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} \&c.$$

Ejus

2. *Ejus Cofinus* $b - \frac{az}{1} - \frac{bz^2}{1.2} + \frac{az^3}{1.2.3} + \frac{bz^4}{1.2.3.4} - \frac{az^5}{1.2.3.4.5} - \frac{bz^6}{1.2.3.4.5.6} \&c.$

Similiter sinus Arcus A — z est

3. $a - \frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} + \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} - \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6} \&c.$

Et cosinus est

4. $b + \frac{az}{1} - \frac{bz^2}{1.2} - \frac{az^3}{1.2.3} + \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{az^5}{1.2.3.4.5} \&c.$

Arcus A est medius Arithmeticus inter arcus A — z & A + z. Differentiæ sinuum sunt

5. $\frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6} \&c.$

6. $\frac{bz}{1} + \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} - \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} + \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6} \&c.$

Unde differentiarum differentia seu differentia secunda

7. *Prodit* $\frac{2az^2}{1.2} - \frac{2az^4}{1.2.3.4} + \frac{2az^6}{1.2.3.4.5.6} \&c.$
Seu $\frac{2a \times z^2}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} \&c.$

Quæ series æqualis est duplo sinu arcus medii ducto in sinum versum arcus z & celerrime convergit. Adeo ut si z sit minutum primum, terminus seriei primus dat differentiam secundam ad 15 figurarum loca; secundus autem terminus ad 25 loca.

Hinc datis sinibus duorum quorumvis arcuum intervallo minuti distantium, facili admodum operatione inveniri possint sinus reliquorum omnium arcuum qui sunt in eadem progressione. In

14 TRIGONOMETRIÆ PLANÆ

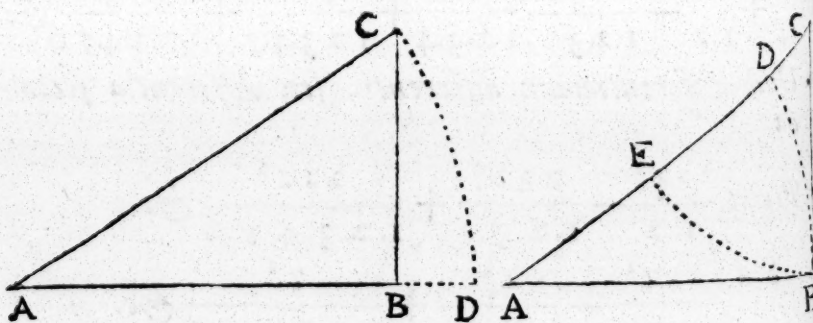
In serie prima & secunda si Arcus A sit $= 0$ erit $a = 0$ & b ejus cosinus sit radius seu 1. & hinc destructis terminis ubi est a & pro b posito 1 series deveniunt Newtonianæ. In serie tertia & quarta. si A sit 90° fiet $b = 0$ & $a = 1$ unde quoque destructis terminis ubi est b & pro a posito 1 rursus prodibunt series Newtonianæ.

Omnes hæ series ex Newtonianis facile fluunt per prop. 5. hujus.

PROP. XI.

In Triangulo Rectangulo, si Hypotenusa sit Radius, latera sunt sinus angulorum oppositorum; si vero crus alterum fiat Radius, crus reliquum est Tangens anguli oppositi, & Hypotenusa est anguli secans.

Manifestum est CB esse sinum arcus CD, ejusque cosinum esse AB, sed arcus CD est mensura anguli A, & complementum mensuræ anguli C. Præterea in secunda figura posito AB radio, est BC Tangens & AC secans ar-



cus BD, qui est mensura anguli A, & similiter in eadem figura posito BC radio, est BA Tangens & AC secans arcus BE vel anguli C. Q. E. D.

Est igitur, ut AC secundum datam quamvis mensuram æstimata ad BC in eadem mensura æstimatam, ita erit 10000000 numerus partium in quas dividi supponitur Radius, ad numerum qui exprimit in iisdem partibus longitudinem quam habet sinus anguli A, hoc est,

Er

ELEMENTA.

15

Erit $AC:BC::R:S, A$

Simili ratione erit $AC:BA::R:S, C$

Item $AB:BC::R:T, A$

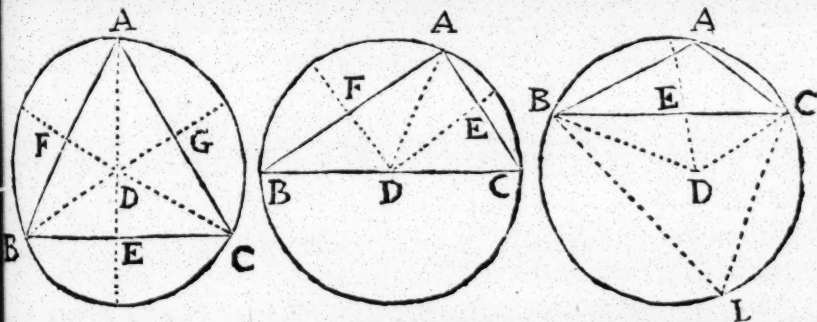
Et $BC:BA::R:T, C$

In his itaque proportionalibus si dantur tres quælibet, per Regulam Trium invenietur quarta.

PROP. XII.

Trianguli plani latera sunt ut sinus angulorum oppositorum.

Trianguli circulo inscripti latera perpendicularibus radiis bisecantur. Et erunt semilatera sinus angulorum ad peripheriam. Est enim angulus BDC ad centrum du-



plex anguli BAC ad peripheriam (per 20. El. 3.) cujusque itaque dimidium sc. BDE æquale est BAC , atque ejus sinus est BE . Eadem ratione erit BF sinus anguli BCA . Et AG erit sinus anguli ABC .

In Triangulo rectangulo est $BD = \frac{1}{2} BC = \text{Radius}$ (per 31. El. 3.) sed Radius est sinus anguli recti unde $\frac{1}{2} BC$ est sinus anguli A .

In Triangulo Amblygonio, ductis BL, CL , erit angulus L complementum anguli A ad duos rectos (per 22. El. 3.) ac proinde idem erit utriusque anguli sinus. Est autem BDE (cujus sinus est BE) = angulo L . quare erit & BE sinus anguli BAC . Sunt itaque in omni triangulo semisses laterum sinus angulorum oppositorum, manifestum autem est latera esse inter se ut ipsorum semisses. Q. E. D.

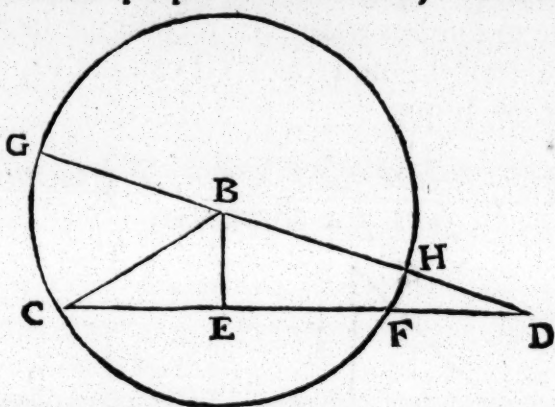
PROP.

angulorum ad Basim, ad E D Tangentem semiffis differentia eorundem. Q. E. D.

PROP. XIV.

In Triangulo Plano, Basis, summa laterum, Differentia laterum, Differentia segmentorum basis sunt proportionales.

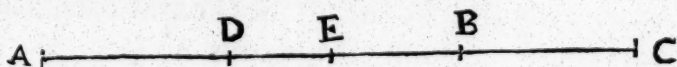
Trianguli BCD basis esto DC, centro B radio BC describatur circulus, & producatu DB in G, ex puncto B in basin cadat perpendicularis BE, erit $DG = DB +$



$BC =$ summae laterum, & $DH =$ differentiae laterum, & segmenta basis sunt DE CE quorum differentia est DF. Quoniam (per cor. prop. 38. El. 3.) rectangulum sub DC DF æquale est rectangulo sub DG DH, erit (per 16. El. 6.) $DC:DG::DH:DF$.

PROBLEMA.

Datis duarum quarumvis quantitatum summa & differentia, ipsas quantitates invenire.



Si ad semisummam addatur semidifferentia, aggregatum erit æquale majori; si autem à semisummâ subducatur semidifferentia, residuum erit æquale minori. Sint enim AB BC duæ quantitates; & capiatur $AD = BC$. Fiet DB differentia. Quarum summa est AC, quæ bisecta in B E dat

18 TRIGONOMETRIÆ PLANÆ

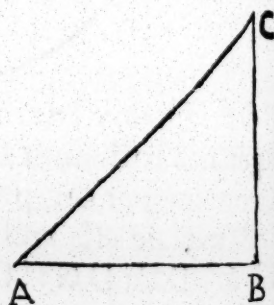
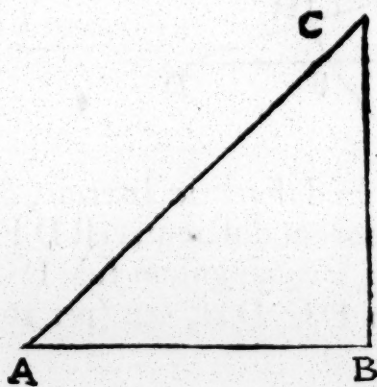
E dat AE vel EC semisummam & DE vel EB semidifferentiam. Porro est $AB = AE + EB = \text{semisumma} + \text{semidifferentia}$, & $BC = CE - EB = \text{semisumma} - \text{semidifferentia}$.

IN quovis Triangulo plano datis duobus angulis, datur tertius qui est summæ duorum reliquorum complementum ad duos rectos.

In Triangulo autem rectangulo dato alterutro angulo acuto, datur reliquus, qui est dati complementum ad rectum.

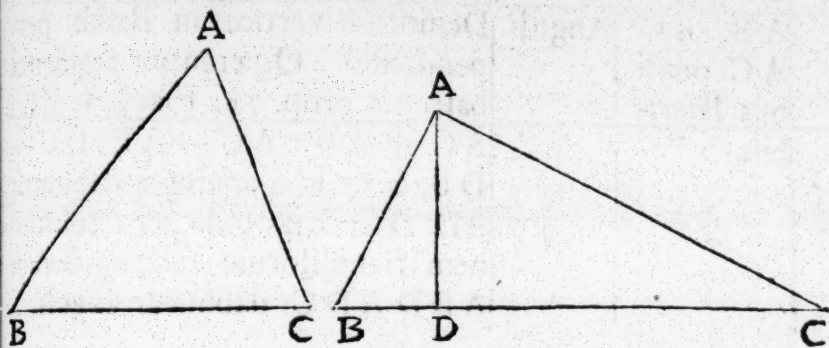
Datis autem duobus trianguli rectanguli lateribus, ut inveniatur reliquum non opus est canone sed perficitur ope prop. primæ hujus.

Trianguli Rectanguli solutiones Trigonometricæ sunt quæ sequuntur.



	Datis.	Quær.	Fiat.
1	AB BC cruribus.	Anguli.	AB:BC::R:T anguli A. Cujus complementum est Angulus C.
2	AB AC crure & Hypoten.	Anguli.	AC:AB::R:S, C cujus complementum est angulus A.
3	AB & A crure & an- gulo.	BC crus alterum.	R:T, A::AB:BC.
4	AB & C crure & an- gulo.	ACHy- potenu- sa.	S,C:R::AB:AC.

In

*In Triangulis obliquangulis.*

Datis.	Quær.	Fiat.
1 A. B. C & A B angulis & latere.	B C & A C latera.	S, C : S, A :: A B : B C. Item S, C : S, B :: A B : A C; datis duobus angulis datur tertius, unde casus cum dantur duo anguli & latus; reliqua quærentur, recidit in hunc casum.
2 A. B. C. omnibus angulis.	A B. A C B C omnia latera.	S, C : S, A :: A B : B C. Et S, C : S, B :: A B : A C. unde datis angulis invenire licet proportionem laterum, at non ipsa latera, nisi ipsorum unum prius innotescat.
3 A B : B C, & C duobus lateribus & angulo uni opposito.	A & B anguli.	A B : B C : S, C : S, A, qui proinde inveniatur. Sed quia idem est finis anguli & ejus complementi ad duos rectos, prænotanda est anguli A Species.
4 A B B C & B. lateribus duobus & angulo interjecto.	Anguli A & C.	$\frac{B C + A B}{2} : \frac{B C - A B}{2} :: \frac{T, A + C}{2} : \frac{T, A - C}{2}$ unde datur differentia angulorum A & C quorum summa quoque est nota; & proinde per <i>Problema post prop. 14.</i> dabuntur ipsi anguli.

20 TRIGONOMETRIÆ PLANÆ, &c.

	Datis.	Quær.	Fiat.
5	A B. B C A C omni- bus lateri- bus.	Anguli.	Demisso à vertice in Basim per- pendiculo. Quærantur segmenta basis per prop. 14. Fiat scil. BC: A C + A B :: A C — A B : D C — D B, & ex hac analogia dabuntur B D. D C. & proinde per resolutio- nem triangulorum rectangulorum A B D A D C dabuntur anguli.

TRIGO.

TRIGONOMETRIÆ

Sphæricæ

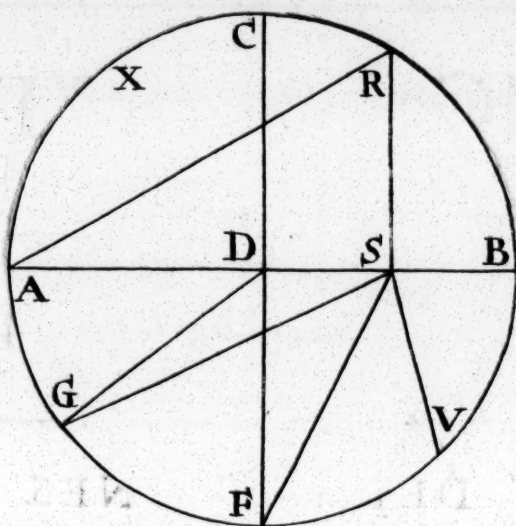
E L E M E N T A.

DEFINITIONES.

1. **S**phæræ Poli, sunt duo puncta in superficie Sphæricâ, quæ sunt Axis extrema.
2. Polus circuli in Sphæra, est punctum in superficie Sphæræ, à quo omnes rectæ lineæ ad circuli circumferentiam tendentes, sunt inter se æquales.
3. Circulus in sphæra maximus est, cujus planum transit per sphæræ centrum, & cujus centrum idem est cum centro Sphæræ.
4. Triangulum Sphæricum est figura comprehensa sub arcubus trium maximorum in Sphæra circularum.
5. Angulus Sphæricus est is qui in superficie sphæricâ, continetur sub duobus arcubus maximorum circularum; qui æqualis est inclinationi planorum istorum circularum.

P R O P. I.

Circuli maximi ACB AFB se bifariam secant.



Cum enim circuli habent idem centrum, communis eorum sectio erit utriusque circuli diameter, quæ eos bifariam secabit.

Cor. Hinc in superficie, sphæræ duo maximorum circulorum Arcus semicirculis minores, spatium non comprehendunt, non enim possunt, nisi in duobus punctis semicirculo oppositis, sibi invicem occurrere.

P R O P. II.

Si à polo C circuli cujuscvis AFB, ducatur ad ejus centrum recta CD, ea ad planum istius circuli perpendicularis erit.

In circulo AFB ducantur diametri quævis EF GH; Et quoniam in triangulis CDF CDE, sunt CD DF æquales CD DE, & basis CF æqualis basi CE (per def. 2.) erit (per 4. El. 1.) angulus CDF = angulo CDE; ac proinde uterque rectus erit, similiter demonstrabitur, angulos

angulos CDG CDH esse rectos ; unde (per 4. El. 11.)
erit CD perpendicularis ad planum circuli $A F E$. Q.E.D.

Cor. 1. Circulus maximus distat à polo suo intervallo
Quadrantis ; nam ob angulos CDG CDF rectos, erunt
ipsorum mensuræ, sc. arcus CG CF quadrantes.

Cor. 2. Circuli maximi per polum alterius circuli tran-
seuntes cum ipso faciunt angulos rectos ; & vicissim, si
cum altero circulo faciunt angulos rectos ; transibunt per
polum alterius istius circuli ; nam per rectam DC eos
transire necesse est.

P R O P. III.

*Si polo A describatur maximus circulus ECF, arcus
CF interceptus inter AC AF, est mensura anguli
CAF vel CDF.*

Per *corol. 1.* præcedentis, sunt arcus AC AF quadran-
tes, ac proinde anguli ADC ADF sunt recti, quare
(per defin. 6. El. 11.) angulus CDF (cujus mensura est
arcus CF) æqualis est inclinationi planorum ACB AFB ,
æqualis quoque angulo Sphærico CAF vel CBF . Q.E.D.

Cor. 1. Si arcus AC AF sunt Quadrantes, erit A
polus circuli per puncta C & F transeuntis, est enim AD
ad planum FDC normalis, (per 4. El. 11.)

Cor. 2. Anguli ad verticem sunt æquales, uterque enim
est æqualis inclinationi circulorum. Item anguli qui sunt
deinceps sunt æquales duobus rectis.

P R O P. IV.

*Triangula erunt æqualia & congrua, si duo latera habe-
ant duobus lateribus æqualia, & angulos æqualibus
lateribus comprehensos etiam æquales.*

P R O P. V.

*Item Triangula erunt æqualia & congrua, si latus cum
angulis adjacentibus in uno triangulo sit æquale la-
teri cum angulis adjacentibus in altero triangulo.*

PROP. VI.

Triangula æquilatera sunt etiam æquiangula.

PROP. VII.

In Triangulis Isoscelibus, anguli ad basim sunt æquales.

PROP. VIII.

Si anguli ad basim fuerint æquales, erit Triangulum Isosceles.

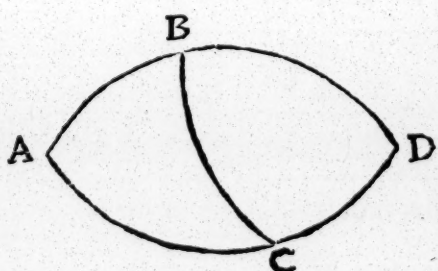
Eodem modo demonstrantur quatuor propositiones præcedentes ut in triangulis planis.

PROP. IX.

Quælibet duo trianguli latera reliquo sunt majora.

Nam arcus circuli maximi, inter duo quælibet in superficie sphæræ puncta, est via brevissima.

PROP. X.



Quodlibet trianguli latus minus est semicirculo.

Producantur, trianguli ABC latera AC AB, donec conveniunt in D, erit arcus ACD semicirculus, qui major est quam AC.

PROP. XI.

Trianguli latera sunt circulo minora.

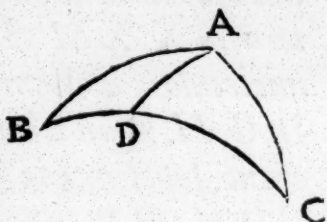
Est enim $DB + DC$ major quam BC , (per prop. 9.) & utrinque addendo $BA + AC$, erit $DBA + DCA$, hoc est, circulus major quam $AB + BC + AC$, qui sunt tria latera trianguli ABC.

PROP.

PROP. XII.

In triangulo ABC , major angulus A majori lateri subtenditur.

Fiat angulus $BAD =$ angulo B , & erit $AD = BD$ (per 8. hujus) unde $BDC = DA + DC$, & hi arcus majores sunt quam AC , est itaque latus BC , quod subtendit angulum BAC , majus quam AC , quod subtendit angulum B .



PROP. XIII.

In quolibet triangulo ABC , si summa Crurum $AB + BC$ sit major æqualis vel minor semicirculo; internus angulus ad basim AC erit major æqualis aut minor externo & opposito BCD , ideoque summa angulorum A & ACB major erit, aut æqualis, aut minor duobus rectis.

Vide Fig. Prop. 10.

Sit primò $AB + BC =$ semicirculo $= AD$, erit $BC = BD$; & anguli BCD & D æquales, (per 8 hujus) unde & angulus BCD erit $=$ angulo A .

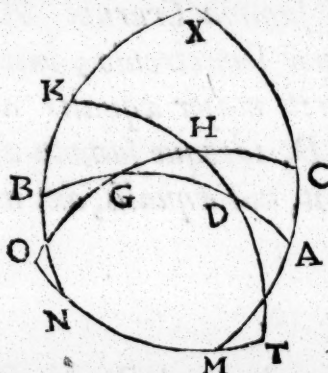
Sit secundò $AB + BC$ majores quam AD , erit BC major quam BD ; unde & angulus D , (hoc est angulus A) major erit angulo BCD . (per 12. hujus) Similiter ostendetur, si $AB + BC$ sint simul minores semicirculo, fore angulum A minorem angulo BCD . & quoniam anguli BCD & BCA sunt $=$ duobus rectis; si angulus A sit major BCD , erit A & BCA majores duobus rectis. Si A sit $= BCD$ erit A & BCA æquales duobus rectis. Si vero A sit minor quam BCD , erunt A & BCA minores duobus rectis. Q. E. D.

PROP.

P R O P. XIV.

In quolibet triangulo GHD, laterum poli, ductis circulis maximis, constituunt aliud triangulum XMN quod supplementum est trianguli GHD; nempe latera NX XM & NM erunt supplementa ad semicirculos arcuum qui sunt mensuræ angulorum D, G, H. Quin etiam mensuræ angulorum M, X, N erunt supplementa ad semicirculos, laterum GH GD & HD.

Polis G, H, D, describantur maximi circuli XCAM TMNO XKBN. Et quia G est polus circuli XCAM,



erit $GM = \text{Quadranti}$, (per cor. 1. prop. 2.) & ob H polum circuli TMO, erit HM quoque Quadrans; Quare (per corol. 1. prop. 3.) erit M polus circuli GH. Similiter quia D est polus circuli XBN, & H polus circuli TMN, erunt arcus DN HN Quadrantes; ac proinde (per cor. 1. prop. 3.) N erit polus circuli

HD. Et eadem ratione, ob GX DX quadrantes, erit X polus circuli GD. Hisce præmissis.

Quoniam est $NK = \text{Quadranti}$, (cor. 1. prop. 2.) & $XB = \text{Quadranti}$, erunt $NK + XB$ hoc est $NX + KB = \text{duobus Quadrantibus seu semicirculo}$; adeoque est NX supplementum arcus KB seu mensuræ anguli HDG ad semicirculum. Similiter quia est $MC = \text{Quadranti}$, & $XA = \text{Quadranti}$; erunt $MC + XA$, hoc est, $XM + AC = \text{duobus quadrantibus seu semicirculo}$, & proinde XM est supplementum arcus AC qui est mensura anguli HGD. Quinetiam, ob MO, NT Quadrantes, erunt $MO + NT = OT + NM = \text{semicirculo}$. itaque est NM supplementum ad semicirculum arcus OT seu mensuræ anguli GHD. Q. E. D.

Præterea

Præterea quia DK HT sunt quadrantes, erunt DK + HT seu KT + HD æquales duobus Quadrantibus, seu semicirculo. Est ergo KT , seu mensura anguli XNM , supplementum lateris HD ad semicirculum. Nec diffimili methodo ostendetur OC mensuram anguli XMN esse supplementum lateris GH . Et BA mensuram anguli X esse supplementum lateris GD . Q. E. D.

PROP. XV.

Triangula æquiangula sunt etiam æquilatera.

Nam eorum supplementa sunt æquilatera, (per 14. hujus) ergo & æquiangula, quare & ipsa sunt æquilatera, per prop. 14. partem secundam.

PROP. XVI.

Trianguli tres anguli sunt majores duobus rectis, & minores sex rectis.

Vide Fig. Prop. 14.

Nam tres mensuræ angulorum G , H , D , una cum tribus lateribus trianguli XNM faciunt tres semicirculos, (per 14. hujus) sed tria latera trianguli XNM minora sunt duobus semicirculis, (per 11. hujus) quare tres mensuræ angulorum GHD majores sunt semicirculo, & proinde anguli GHD majores erunt duobus rectis.

Propositionis secunda pars patet, nam in quolibet triangulo, externi & interni anguli simul tantum faciunt sex rectos, unde interni sunt minores quam sex recti.

PROP. XVII.

*Si à puncto R , quod circuli $AFBE$ polus non est, in circumferentiam cadant arcus maximorum circulorum RA RB RG RV , maximus est RA , qui per ejus polum C incedit; reliquus vero minimus, cæteri prout à maximo recedunt minores sunt, faciunt-
que*

28 TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ

que cum priore circulo AFB angulum obtusum ex parte maximi arcus.

Vide Fig. Prop. I.

Quia C est polus circuli AFB, erunt CD & huic parallela RS perpendiculares ad planum AFB; Ductis autem SA SG SV; erit (per 7. El. 3.) SA major quam SG, & SG major quam SV. unde in Triangulis rectangulis planis RSA RSG RSV, erunt $RSq + SAq$ seu RAq majora quam $RSq + SGq$ seu RGq , & proinde RA major erit RG; & arcus RA major arcu RG. Similiter erunt $RSq + SGq$ seu RGq majora quam $RSq + SVq$ seu RVq ; & proinde RG major RV, & arcus RG major arcu RV.

2do. Est angulus RGA major angulo CGA qui rectus est, (per corol. prop. 3.) Et angulus RVA major angulo CVA qui quoque rectus est, quare anguli RGA RVA sunt obtusi.

PROP. XVIII.

In triangulo rectangulo ad A, crura angulum rectum continentia sunt ejusdem affectionis cum angulis oppositis, hoc est, si crura sint majora aut minora Quadrantibus, anguli illis oppositi erunt majores aut minores rectis angulis. Vide Fig. prop. primæ.

Nam si AC sit Quadrans, C erit polus circuli AFB, & anguli AGC vel AVC erunt recti. Si crus AR sit majus quadrante, erit angulus AGR major recto (per 17. hujus.) Si crus sit minus quadrante ut AX, angulus AGX erit minor recto.

PROP. XIX.

Si duo crura trianguli rectanguli (& consequenter anguli) sint ejusdem affectionis, id est, utrumque vel majus

majus vel minus Quadrante, hypotenusa erit minus quadrante.

Vide Fig. Prop. I.

In triangulo ARV vel BRV , fit F polus cruris AR , & erit RF quadrans, qui major est quam RV (per 17. hujus.)

PROP. XX.

Si sint diversæ affectionis, hypotenusa erit major Quadrante.

Nam in triangulo ARG , est RG major quam RF qui est quadrans.

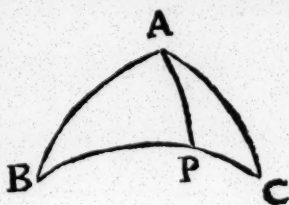
PROP. XXI.

Si Hypotenusa sit major vel minor quadrante, crura anguli recti, ideoque & anguli oppositi sunt ejusdem aut diversæ affectionis.

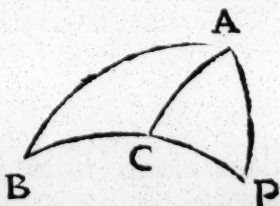
Hæc propositio est priorum conversa ; & facile ex iisdem sequitur.

PROP. XXII.

In quovis triangulo ABC , si anguli B & C ad basim sunt ejusdem affectionis, perpendicularis AP cadet intra triangulum ; si sint diversæ affectionis, perpendicularis cadet extra triangulum.



In primo casu si perpendicularis non cadat intra, cadet extra triangulum, (ut in fig. 2.) Tum in triangulo ABP , est AP ejusdem affectionis cum angulo B ; & similiter in triangulo ACP , est AP ejusdem affectionis cum angulo C ; ergo cum ABC & ACP sunt ejusdem affectionis,

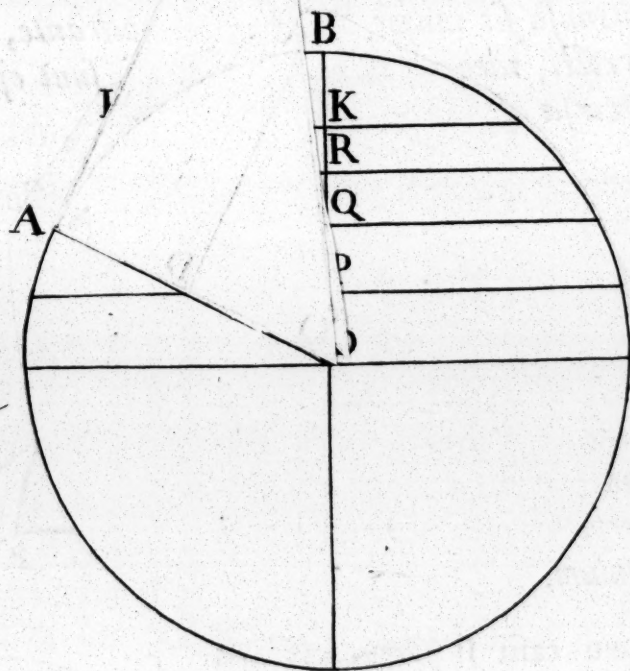


30 TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ
nis, erunt anguli ABC & ACB diversæ affectionis
quod est contra hypothesim.

In 2^{do} Casu si perpendicularis non cadat extra, cade
intra, (ut in fig. 1.) Et in triangulo ABP, est angulus B
ejusdem affectionis cum crure AP, & similiter in trian
gulo ACP est angulus C ejusdem affectionis cum AP
unde anguli B & C sunt ejusdem affectionis, quod est con
tra hypothesim.

PROP. XXIII.

In Triangulis BAC & HAE rectangulis ad A & H
si idem fuerit angulus acutus B ad basim BA vel
BH, Sinus hypotenusarum erunt sinubus arcuum
perpendicularium proportionales.



Nam rectæ CD EF perpendiculariter insistentes ei
dem plano sunt parallelæ. Item FR DP radio OP
perpendiculares, sunt quoque parallelæ; unde & pla
na triangulorum EFR CDP sunt parallela (per 15. El.
II.) Quare & CP ER horum planorum communes
sectiones

ectionis
a, cade
ngulus
in trian
um A P
est con

ectiones cum plano per BE CO transeunte parallelæ
runt (per 16. El. 11.) Triangula igitur CDP EFR
equiangula erunt. Quare CP sinus Hypotenusæ BC est
ad CD sinum arcus perpendicularis CA; ut ER sinus
hypotenusæ BE est ad EF sinum arcus perpendicularis
EH. Q. E. D.

PROP. XXIV.

idem positis, AQ HK sinus basium, tangentibus I A
GH arcuum perpendicularium, sunt proportionales.

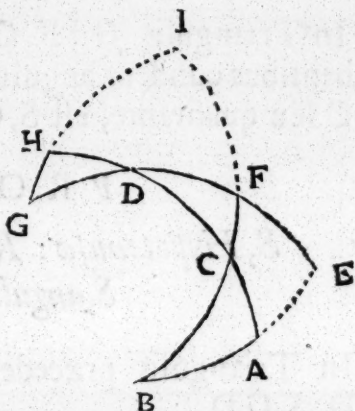
A & H
B A ve
arcuum

Nam similiter ut in præcedente propositione, ostende-
tur triangula QAI KHG esse æquiangula; unde QA:
AI::KH:HG.

PROP. XXV.

In Triangulo ABC rectangulo ad A. Ut cosinus angu-
li B existentis ad Basim BA ad sinum anguli verti-
calis ACB, ita cosinus arcus perpendicularis ad
Radium.

Præparatio. Producantur latera BA BC CA ita ut
E BF CI CH sint Quadrantes, polis B & C ducan-
tur circuli maximi EF DG
HG. & erunt anguli ad
EFI & H recti. Quare D
est polus BAE (per cor. 2. pr.
hujus) & G polus IFCB,
erit etiam AE = comple-
mento arcus BA, Item FE
mensura anguli B = GD &
OF eorum complement-
um, erit quoque BC = FI
= mensuræ anguli G, & CF
eorum complementum. Item est CA = HD & DC utri-
usque complementum. Hisce præmissis, in triangulis HIC
DEF rectangulis ad I & F & habentibus eundem angu-
lum

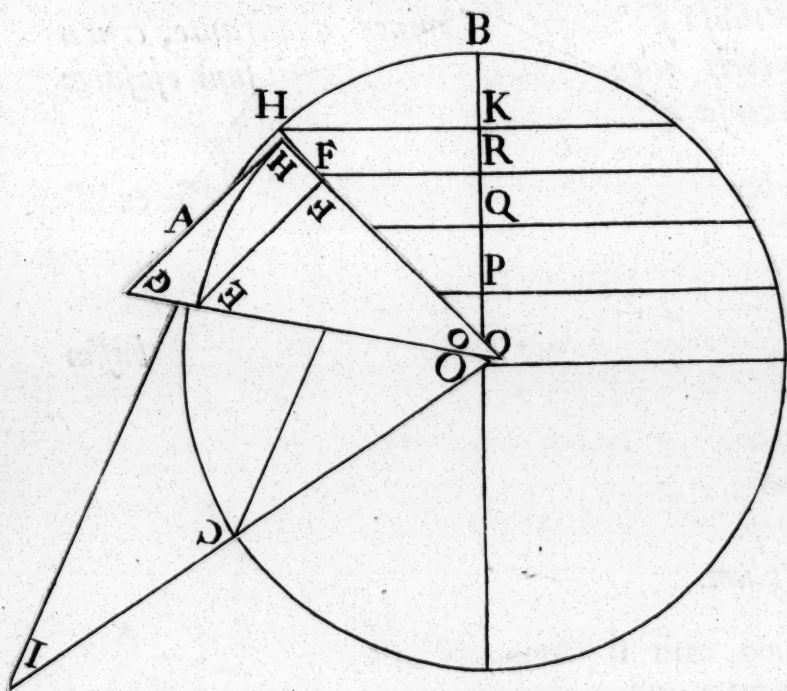


30 TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ
nis, erunt anguli ABC & ACB diversæ affectionis
quod est contra hypothefim.

In 2^{do} Casu si perpendicularis non cadat extra, cadet
intra, (ut in fig. 1.) Et in triangulo ABP, est angulus
ejusdem affectionis cum crure AP, & similiter in trian-
gulo ACP est angulus C ejusdem affectionis cum AP
unde anguli B & C sunt ejusdem affectionis, quod est con-
tra hypothefim.

PROP. XXIII.

*In Triangulis BAC BHE rectangulis ad A & H
si idem fuerit angulus acutus B ad basim BA vel
BH, Sinus hypotenusarum erunt sinubus arcuum
perpendicularium proportionales.*



Nam rectæ CD EF perpendiculariter insistentes ei-
dem plano sunt parallelæ. Item FR DP radio OP
perpendiculares, sunt quoque parallelæ; unde & pla-
na triangulorum EFR CDP sunt parallela (per 15. EL
II.) Quare & CP ER horum planorum communes
sectiones

tionibus cum plano per BE CO transeunte parallelæ
 unt (per 16. El. 11.) Triangula igitur CDP EFR
 uia angula erunt. Quare CP sinus Hypotenusæ BC est
 CD sinum arcus perpendicularis CA; ut ER sinus
 ypotenusæ BE est ad EF sinum arcus perpendicularis
 H. Q. E. D.

PROP. XXIV.

*Idem positis, AQ HK sinus basium, tangentibus IA
 GH arcuum perpendicularium, sunt proportionales.*

Nam similiter ut in præcedente propositione, ostende-
 r triangula QAI KHG esse æquiangula; unde QA:
 I::KH:HG.

PROP. XXV.

*Triangulo ABC rectangulo ad A. Ut cosinus angu-
 li B existentis ad Basim BA ad sinum anguli verti-
 calis ACB, ita cosinus arcus perpendicularis ad
 Radium.*

Præparatio. Producantur latera BA BC CA ita ut
 E BF CI CH sint Quadrantes, polis B & C ducan-
 r circuli maximi EFDG

HG. & erunt anguli ad
 FI & H recti. Quare D

polus BAE (per cor. 2. pr.

hujus) & G polus IFCB,

erit etiam AE = comple-

mento arcus BA, Item FE

mensura anguli B = GD &

CF eorum complement-

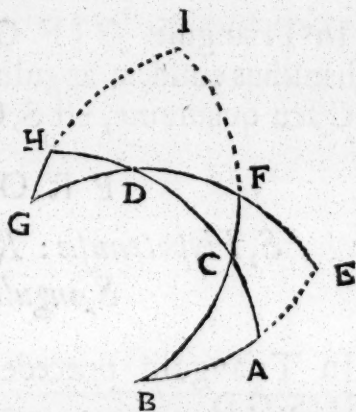
m, erit quoque BC = FI

= mensuræ anguli G, & CF

eorum complementum. Item est CA = HD & DC utri-

usque complementum. Hisce præmissis, in triangulis HIC

EF rectangulis ad I & F & habentibus eundem an-



gulum

32 TRIGONOMETRIÆ SPHERICÆ

gulum C acutum, ob BA minorem quadrante, erit S, DE
S, HI :: S, DC : S, HC id est, cosinus anguli B est ad G
num anguli verticalis BCA ut cosinus CA ad Radium
Q. E. D.

P R O P. XXVI.

*Cosinus basis : cosin. Hypotenusæ :: R : coS per-
pendicularis.*

Nam in Triangulis A E D C F D rectangulis ad E &
F; habentibus eundem angulum D acutum: ob A E qua-
drante minorem, est S, EA : S, CF :: S, DA : S, DC. Q.
E. D.

P R O P. XXVII.

*S, Baseos : R :: T, perpendicularis : T, anguli
ad basim.*

Nam in Triangulis B A C B E F rectangulis ad A & E
& habentibus eundem angulum B acutum, ob A C mino-
rem quadrante, S, BA : S, BE :: T, AC : T, EF. Q. E. D.

P R O P. XXVIII.

*CoS, anguli verticalis : R :: T, perpendicularis :
T, Hypotenusæ.*

In Triangulis G I F G H D rectangulis ad I & H, &
habentibus eundem angulum G acutum, ob H D minorem
HC seu quadrante, est S, GH : S, GI :: T, HD : T, IF.

P R O P. XXIX.

*S, Hypotenusæ : R :: S, perpendicularis :
S, anguli ad basim.*

In Triangulis præcedentibus, est S, IF : S, GF :: S,
HD : S, GD.

PROP.

P R O P. XXX.

*Radius : coS. Hypotenusa :: T, anguli verticalis :
coT, anguli ad basim.*

In Triangulis HIC DFC rectangulis ad I & F, & habentibus eundem angulum C acutum, ob DF minorem quadrante, Est $S, CI : S, CF :: T, HI : T, DF$. hoc est, $R : coS, BC :: Tang, C : coT, anguli B$.

Propositiones sex præcedentes ad omnes casus triangulorum rectangulorum resolvendos sufficiunt, sequuntur illi numero sedecim cum suis analogiis ex hisce deductis.

	Datis præter ang. rectum.	Quær.	
1	AC & B C	R : coS, CA :: S, C : coS, B ejusdem speciei cum CA.	per 25 inverse
2	AC & B B	coS, CA : R :: coS, B : S, C am- bigui.	per 25
3	B & C AC	S, C : coS, B :: R : coS, CA ejusdem speciei cum ang. B.	per 25 & 18
4	BA CA BC	R : coS, BA :: coS, AC : coS, BC. Si BA AC fuerint ejusdem affectionis nec Quadrantes, erit BC minor quadrante; si diversæ, erit BC quadrante major.	per 26 & 19 20
5	BA BC AC	coS, BA : R :: coS, BC : coS, CA. Si BC sit major aut minor quadrante, BA & CA erunt ejusdem aut diversæ affectionis, sed datur BA ejusque Species, ergo.	per 26 & 21
6	BA CA B	S, BA : R :: T, CA : T, B ejusdem affectionis cum latere opposito CA.	per 27 & 18
7	BA B AC	R : S, BA :: T, B : T, AC, ejusdem speciei cum B.	per 27 & 18

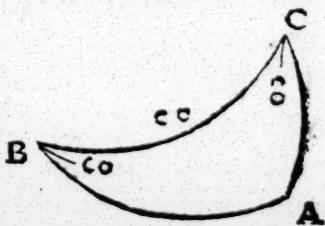
34 TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ

	Datis præter ang. rectum.	Quær.	
8	AC B BA	T, B: R:: T, CA: S, BA ambigui.	per 27
9	BC C AC	R: coS, C:: T, BC: T, CA. Si BC sit major aut minor quadrante, anguli C & B sunt ejusdem aut diversæ affectionis, quare data specie ang. B dabitur AC.	per 28 & 21
10	AC C BC	coS, C: R:: T, AC: T, BC. pro ut ang. C & AC fuerint ejusdem aut diversæ affectionis, BC erit minor aut major quadrante.	per 28 20 21
11	BC AC C	T, BC: R:: T, CA: coS, C. Si BC fuerit major aut minor Quadrante, CA & BA & proinde anguli erunt ejusdem aut diversæ affectionis, sed datur species CA, ergo dabitur species anguli C.	per 28 21
12	BC B AC	R: S, BC:: S, B: S, AC ejusdem speciei eum B.	per 29 & 18
13	AC B BC	S, B: S, AC:: R: S, BC ambigui.	per 29
14	BC AC B	S, BC: R:: S, AC: S, B ejusdem speciei cum CA.	per 29
15	B C BC	T, C: R:: coT, B: coS, BC. pro ut anguli B & C ejusdem aut diversæ affectionis fuerint, erit BC minor aut major quadrante.	per 30 19 20
16	BC C B	R: coS, BC:: T, C: coT, B. pro ut BC fuerit minor aut major quadrante; anguli C & B erunt ejusdem aut diversæ affectionis. Sed datur species anguli C. quare dabitur species anguli B.	per 30 21

De

De Resolutione Triangulorum Rectangulorum Sphæricorum, per quinque partes circulares.

PErpenfis Analogiis, quibus Triangula Sphærica Rectangula solvuntur, Dominus *Neperus*, nobilis ille Logarithmorum Inventor, duas excogitavit Regulas memoriâ facile retinendas, quarum ope omnes sedecim casus resolvi possunt; Nam cum in hisce triangulis, præter angulum rectum, sint tria latera & duo anguli, latera angulum rectum comprehendentia, hypotenusæ autem & reliquorum angulorum complementa, vocavit *Neperus partes circulares*. Et cum datæ sunt duæ quælibet partes, & quæritur Tertia, Harum trium una, quæ dicitur *pars media*, vel adjacet duobus reliquis partibus, quæ itaque vocantur *extremæ adjacentes*; vel neutri adjacet, in quo casu, dicuntur *extremæ oppositæ*; Sic si complementum anguli B ponatur pars media, Crus AB & complementum Hypotenusæ BC sunt partes extremæ adjacentes; At complementum anguli C, & latus AC sunt extremæ oppositæ. Item posito complemento hypotenusæ BC parte media, complementa angulorum B & C sunt extremæ adjacentes; & AB AC crura sunt extremæ oppositæ. Sic etiam posito crure AB parte media, complementum anguli B, & AC sunt extremæ adjacentes; Nam angulus rectus A non intercipit adjacenciam, quia non est pars circularis. At eidem parti mediæ complementum anguli C & complementum hypotenusæ BC sunt extremæ oppositæ. Hisce præmissis.



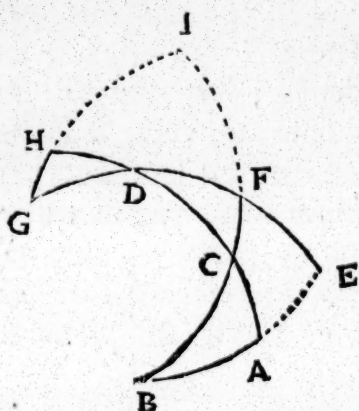
REGULA PRIMA.

In Triangulo Rectangulo Sphærico, Rectangulum sub Radio & sinu partes mediæ, æquale est rectangulo sub Tangentibus partium Adjacentium.

REGULA SECUNDA.

Rectangulum sub radio & sinu partis mediæ, æquale est rectangulo sub cosinibus partium oppositarum.

Utriusque Regulæ tres sunt casus. Nam pars mediæ vel potest esse complementum anguli B vel C, vel complementum hypotenusæ BC; vel denique unum ex cruribus scil. AB vel AC.



Casus 1. Sit complementum anguli C pars mediæ. Et erunt AC & complementum hypotenusæ BC extremæ adjacentes. Per pr. 28. Est ut cosinus anguli verticalis C ad Radium, Ita Tangens CA ad Tangentem Hypotenusæ BC. permutando erit $\cos C : T, CA :: R : T, BC$. sed ut notum

est, $R : T, BC :: \cos T, BC : R$. quare $\cos C : T, CA :: \cos T, BC : R$; Unde $R \times \cos C = T, A \times \cos T, BC$.

Eidem complemento anguli C parti mediæ, extremæ oppositæ sunt complementum anguli B & AB, (& per prop. 25.) $\cos$ Sinus anguli C est ad sinum anguli CDF ut $\cos$ Sinus DF ad Radium, est vero Sinus CDF = S, AE = $\cos S, BA$, & $\cos S, DF = S, EF = S$, ang. B. unde erit $\cos S, C : \cos S, BA :: S, B : R$. & $R \times \cos S, C = \cos S, BA \times S, B$ hoc est, Radius ductus in sinum partis mediæ, æquatur rectangulo sub cosinibus extremarum oppositarum.

Casus 2. Sit complementum hypotenusæ BC pars mediæ, & complementa angulorum B & C erunt extremæ adjacentes. In triangulo DCF (per prop. 27.) Est $S, CF : R :: T, DF : T, C$. unde permutando $S, CF : T, DF :: (R : T, C ::) \cos T, C : R$. est autem $S, CF = \cos S, BC$ & $T, DF = \cos T, B$. quare est $R \times \cos S, BC = \cos T, C \times \cos T, B$. hoc est, Radius ductus in sinum partis mediæ æquatur producto

producto ex Tangentibus partium adjacentium extremarum.

Eidem parti mediæ, scil. complemento BC, adsunt extremæ oppositæ AB AC, & (per prop. 26.) est $\cos, BA : \cos, BC :: R : \cos, AC$. quare erit $R \times \cos, BC = \cos, BA \times \cos, AC$.

Cas. 3. Sit denique AB pars media, & erunt complementum anguli B & AC extremæ adjacentes, (& per pr. 27.) $S, AB : R :: T, CA : TB$. unde erit $S, AB : T, CA :: (R : T, B ::) \cos T, B : R$. adeoque erit $R \times S, AB = T, CA \times \cos T, B$.

Præterea parti mediæ AB, complementum BC, & complementum anguli C sunt extremæ oppositæ; & in triangulo GHD (per prop. 25.) Est $\cos, D : S, DGH :: \cos, GH : R$. est vero $\cos, D = \cos, AE = S, AB$, & $S, G = S, IF = S, BC$. Item est $\cos, GH = S, HI = S, C$. quare erit $S, AB : S, BC :: S, C : R$. & hinc $R \times S, AB = S, BC \times S, C$.

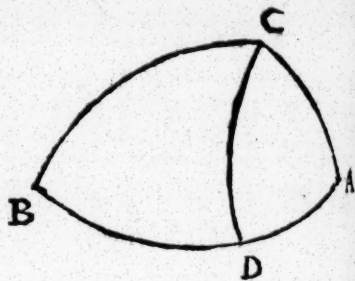
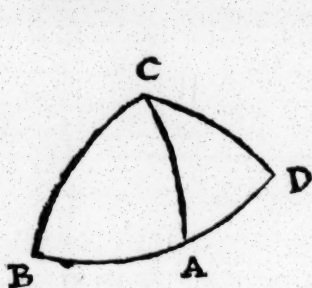
Itaque in omni casu, rectangulum sub radio & sinu partis mediæ æquale erit tam rectangulo sub cosinibus extremarum oppositarum, quam rectangulo sub tangentibus extremarum adjacentium. Et proinde si æquationes illæ resolvantur in Analogias (per 16. Elem. 6.) ope regulæ Proportionis, partes ignotæ innotescunt. Et si pars quæ sita sit media, primus Analogiæ terminus erit Radius, secundum & tertium occupant locum tangentes vel cosinus partium extremarum. Si vero quæratür extremarum una, Analogia incipi debet cum altera, atque Radius sinusque partis mediæ, in mediis ponantur locis, ut quartum teneat pars quæ sita.

IN Triangulis Sphæricis obliquangulis BCD, demisso arcu perpendiculari AC, ab angulo C in basim BD, (productam si opus fuerit,) ut duo fiant Triangula BAC DAC rectangula; eorum ope resolvi possunt plerique casus Triangulorum obliquangulorum.

38 TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ

PROP. XXXI.

Cofinus angulorum B & D ad basim B D, sinubus angulorum verticalium B C A D C A sunt proportionales.



Nam $\cos B : \sin BCA :: (\cos C A : R ::) \cos D : \sin DCA$ (per 25. hujus.)

PROP. XXXII.

Cofinus laterum B C D C sunt proportionales cofinibus basium B A D A.

Est enim $\cos BC : \cos BA :: (\cos C A : R ::) \cos DC : \cos DA$. (per 26 hujus.)

PROP. XXXIII.

Sinus basium B A D A, sunt in reciproca proportione tangentium angulorum B & D ad Basim B D.

Quia per 27. hujus est, $\sin BA : R :: \tan AC : \tan B$. Item per eandem, inverse $R : \sin DA :: \tan AC : \tan D$. erit ex æquo in perturbata ratione (per 23. El. 5.) $\sin BA : \sin DA :: \tan D : \tan B$.

PROP. XXXIV.

Tangentes laterum B C D C sunt in reciproca proportione cofinuum angulorum verticalium B C A, D C A.

Quia

Quia per 28. hujus permutando, Est

$$T, BC: R :: T, CA: coS, BCA$$

& per eandem

$$R : coS, D C A :: T, D C : T, C A$$

quare ex æquo in perturbata ratione est

$$T, BA : coS, DCA :: T, DC : coS, BCA.$$

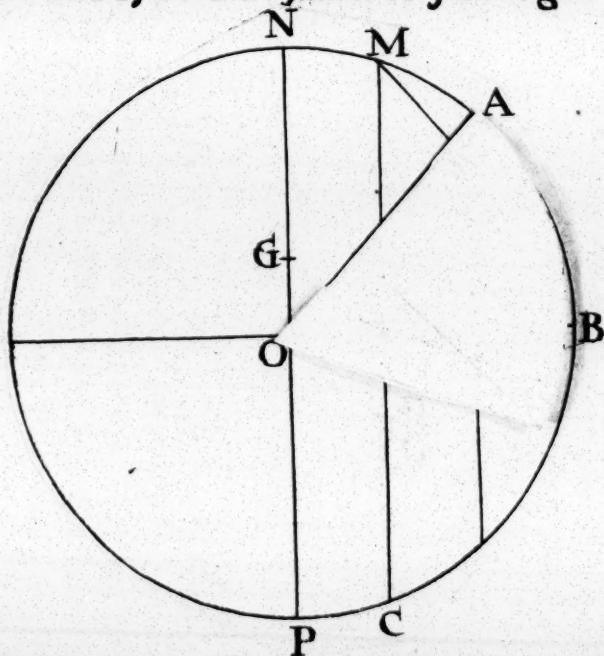
P R O P. XXXV.

*Sinus laterum BC sinibus angulorum oppositorum
B & D sunt proportionales.*

Quia per 20. hujus $S, BC : R :: S, CA : S, \text{ang. } B$
 & per eandem inverſe $R : S, DC :: S, \text{ang. } D : S, CA$
 erit ex æquo in perturbata ratione $S, BC : S, DC :: S, D :$
 $S, B.$

P R O P. XXXVI.

In Triangulo quovis Sphærico ABC , $CF \times AE$ vel $FM \times AE$, rectangulum sub sinibus crurum BC & BA est ad radii quadratum, ut IL seu $IA - LA$ differentia sinuum versorum Basis AC , & differentia crurum AM , ad GN sinum versum anguli B .



Polo B describatur circulus maximus PN; sintque BP
C₄ BN

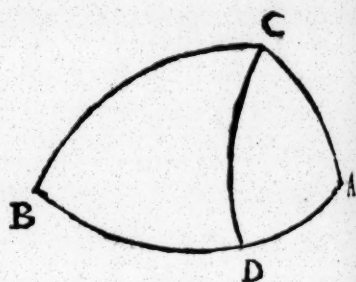
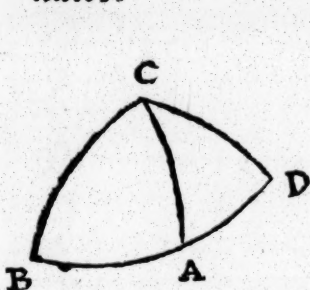
C₄

BN

38 TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ

PROP. XXXI.

Cofinus angulorum B & D ad basim B D, sinubus angulorum verticalium B C A D C A sunt proportionales.



Nam $\cos B : S, B C A :: (\cos, C A : R ::) \cos, D : S, D C A$ (per 25. hujus.)

PROP. XXXII.

Cofinus laterum B C D C sunt proportionales cofinibus basium B A D A.

Est enim $\cos, B C : \cos, B A :: (\cos, C A : R ::) \cos, D C : \cos, D A$. (per 26 hujus.)

PROP. XXXIII.

Sinus basium B A D A, sunt in reciproca proportione tangentium angulorum B & D ad Basim B D.

Quia per 27. hujus est, $S, B A : R :: T, A C : T$, anguli B. Item per eandem, inverse $R : S, D A :: T$, ang. D : $T, A C$. erit ex æquo in perturbata ratione (per 23. El. 5.) $S, B A : S, D A :: T$, ang. D : T , ang. B.

PROP. XXXIV.

Tangentes laterum B C D C sunt in reciproca proportione cofinuum angulorum verticalium B C A, D C A.

Quia

Quia per 28. hujus permutando, Est

$$T, BC : R :: T, CA : \cos, BCA$$

& per eandem

$$R : \cos, DCA :: T, DC : T, CA$$

quare ex æquo in perturbata ratione est

$$T, BA : \cos, DCA :: T, DC : \cos, BCA.$$

P R O P. XXXV.

*Sinus laterum BC sinubus angulorum oppositorum
B & D sunt proportionales.*

Quia per 29. hujus $S, BC : R :: S, CA : S, \text{ang. } B$

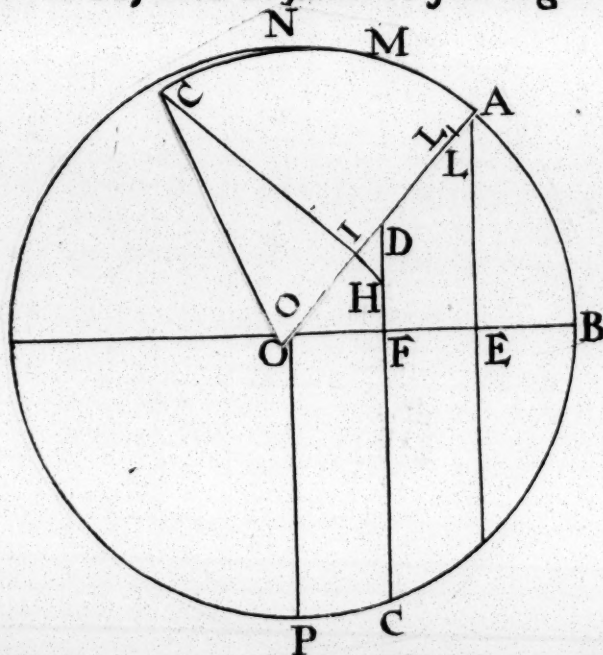
& per eandem inverse

$$R : S, DC :: S, \text{ang. } D : S, CA$$

erit ex æquo in perturbata ratione $S, BC : S, DC :: S, D : S, B.$

P R O P. XXXVI.

*In Triangulo quovis Sphærico ABC, $CF \times AE$ vel
 $FM \times AE$, rectangulum sub sinubus crurum BC BA
est ad radii quadratum, ut IL seu $IA - LA$ dif-
ferentia sinuum versorum Basis AC, & differentia
crurum AM, ad GN sinum versum anguli B.*



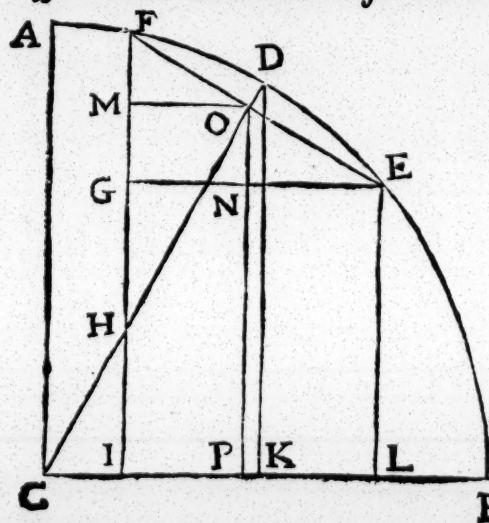
Polo B describatur circulus maximus PN; sintque BP BN

40 TRIGONOMETRIÆ SPHERICÆ

BN quadrantes; & PN est mensura anguli B; eodem polo B per C describatur circulus minor CFM; horum circulorum plana recta erunt plano BON, (per 20. h.) & PG CH perpendiculares in idem planum, cadent in communes sectiones ON FM puta in G & H. ducatur HI perpendicularis ad AO, & planum per CH HI perpendicularare erit plano AOB, unde AI perpendicularis ad HI, erit perpendicularis ad rectam CI, (per def. 4. El. 11.) est itaque AI sinus versus arcus AC, & AL sinus versus arcus AM = BM - BA = BC - BA. Triangula Ifofcelia CFM PON sunt æquiangulara, ob MF NO item CF PO parallelas (per 16. El. 11.) quare demissis perpendicularis CH PH in latera FM ON, similiter divisa erunt Triangula; & erit FM:ON::MH:GN. Itemque ob triangula AOE DIH DLM æquiangulara erit AE:AO::IL:MH at ostensum est, esse FM:ON::MH:GN quare erit AE x FM ad AO x ON ut IL x MH, ad MH x GN seu ut IL ad GN. hoc est rectangulum sub sinibus crurum est ad quadratum Radii ut differentia sinuum versorum basis & differentia crurum BC BA ad sinum versus anguli B. Q. E. D.

P R O P. XXXVII

Differentia Sinuum versorum duorum arcuum ducta in



$\frac{1}{2}$ Radium, æqualis est rectangulo sub sinu semisummæ & sinu semidifferentiæ eorundem arcuum.

Sint duo arcus BE BF, quorum differentia EF sit bisecta in D, & erit BD semisumma arcuum, & BF D semidifferentia.

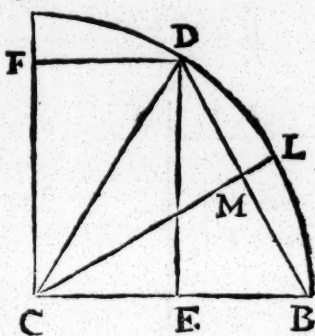
Est

Est $GE = IL$ differentiae sinuum versorum arcuum BE BF ; Item est FO sinus semidifferentiae arcuum. Ob æqui-
angula triangula CDK FEG ; erit $DK:GE:: (CD:FE::) \frac{1}{2} CD:\frac{1}{2} FE$. Unde est $DK \times \frac{1}{2} FE$ seu $DK \times FO = GE \times \frac{1}{2} CD = IL \times \frac{1}{2} CD$. Q. E. D.

PRO P. XXVIII.

Sinus versus cuiusvis arcus, ductus in dimidium Radii, æqualis est quadrato sinus dimidii ejusdem arcus.

Triangula CBM DEB sunt æquiangula ob angulos ad M & E rectos & angulum ad B communem. Quare est $EB:BD::BM:BC$ erit itaque $EB \times BC = BM \times BD$ & $EB \times \frac{1}{2} BC = BM \times \frac{1}{2} BD = BM$ q. Q. E. D.



PRO P. XXXIX.

In quolibet Triangulo ABC , cujus crura angulum B continentia sint BC AB , & basis AC eundem angulum subtendat; si capiatur AM arcus = differentiae crurum = $BC - AB$. erit Rectangulum sub sinibus crurum BC BA ad quadratum Radii ut

Rectangulum sub sinu arcus $\frac{AC + AM}{2}$ & sinu arcus $\frac{AC - AM}{2}$ ad Quadratum sinus dimidii anguli B .

Vide Fig. Prop. 36. hujus.

Quoniam est rectangulum sub sinibus crurum AB BC ad quadratum radii, ut IL ad sinum versum anguli B vel ut $\frac{1}{2} R \times IL$ ad $\frac{1}{2} R$ ductum in sinum versum anguli B (per prop. 36. hujus.) Est autem $\frac{1}{2} R \times IL =$ rectangulo sub

42 TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ

sub finibus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ & $\frac{AC-AM}{2}$ (per pr.

37. hujus.) Item est $\frac{1}{2}R$ ductus in finem versum anguli B æqualis Quadrato sinus dimidii anguli B. Quare erit Rectangulum sub finibus crurum, ad Radii quadratum, ut Rectangulum sub finibus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ & $\frac{AC-AM}{2}$

ad Quadratum sinus dimidii anguli B. Q. E. D.

Sequuntur duodecim Casus Triangulorum Sphæricorum obliquangulorum.

	Datis	Quær.	Fiat. <i>Vide Fig. Prop. 31.</i>
1	Ang. B, D, & BC.	Ang. C.	coS, BC : R :: T, B : coT, B C A (per 30. hujus.) Item coS, B : S, B C A :: coS, D : S, D C A (per 31. hujus.) Quare angulorum B C A D C A summa, si perpendicularis cadat intra triangulum, vel differentia, si extra cadat; erit = B C D. Num perpendicularis cadit intra vel extra, cognoscitur ex affectione angulorum B & D (per 22. hujus) quod semel monuisse sufficiat.
2	Ang. B, C, & latere BC.	Ang. D.	coS, BC : R :: T B : coT, B C A (per 30. hujus) & S, B C A : S, D C A :: coS, B : coS, D (per 31. hujus.) Si B C A sit minor B C D, angulus D erit ejusdem affectionis cum angulo B. Sin B C A sit major B C D, anguli B & D erunt affectionis diversæ per conversam pr. 22.
3	BC CD lateribus & ang. B.	BD latus.	R : coS, B :: T, B C : T, B A. (per 28. hujus) & coS, B C : coS, B A :: coS, D C : coS, D A (per 32. hujus) horum BA DA summa vel differentia, prout perpendicularis cadit intra, vel extra Triangulum, est æqualis BD quod cognosci nequit nisi cognita sit species alterius anguli D.

Datis

Datis.	Quær.	Fiat.
BC DB lateri- bus & ang. B	C D latus.	R: coS, B::T, BC:T, BA (per 28. hu- jus.) Et coS, BA: coS, BC:: coS, DA: coS, DC. (per 32. h.) Prout DA simi- lis est aut diffimilis CA vel ang. BDC, erit DC minor aut major Quadrante (per 19 & 20 hujus.)
B, D, ang. & BC. la- tere.	B D la tus.	R: coS, B::T, BC:T, BA (per 28. hujus.) Et T, D: TB::S, BA:S, DA (per 36. hujus) quorum BA DA sum- ma vel differentia = BD.
BC BD lateri- bus & ang. B	Ang. D.	R: coS, B::T, BC:T, BA (per 28. hu- jus.) Et S, DA:S, BA::TB:T, D(per 33. hujus.) Prout BD minor est aut major quam BA, angulus D similis aut diffimilis erit angulo B. (per 22. hujus.)
BC DC lateri- bus & ang. B	Ang. C.	coS, BC:R::coT, B:T, BCA (per 30. h.) Et T, DC:T, BC::coS, BCA: coS, DCA (per 34. hujus.) Angulorum BCA DCA summa aut differentia, prout perpendicularis cadit intra vel extra triangulum, est æqualis angulo BCD.
B,  ang. & BC la- tere.	DC latus.	coS, BC:R::coT, B:T, BCA. (per 30 hujus. Item coS, DCA: coS, BCA: T, BC:T, DC (per 34. h.) Si angulus DCA similis sit angulo B (hoc est, si AD sit similis CA) erit DC minor quadrante. Si anguli DCA & B sint diffimiles, erit DC quadrante major, quod sequitur (ex pr. 18 19 & 20 h.)
BC DC lat. & ang. B	D. ang.	S, CD: S, B::S, BC: S, D qui ambi- guus est. Analogia sequitur (ex prop. 35. hujus.
B D ang. & BC lat.	DC	S, D: S, BC::S, B: S, DC quod latus ambiguum est.

Datis.

44 TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ

	Datis.	Quær.	Fiat.
f 1	AB BC CA om- nibus lateri- bus vi- de fig. pr. 36.	Ang. B.	Rectangulum sub sinibus crurum AB BC: quadratum Radii :: rectangulum sub sinibus arcuum $\frac{AC + AM}{2} \frac{AC - AM}{2}$ Quadrato sinus $\frac{1}{2}$ ang. B. per prop. 39.
12	G H D omni- bus ang.	G D latus.	<i>Vide fig. prop. 14.</i> In Triangulo XNM, Est MN com- plementum anguli GHD ad semicir- culum. XM complementum anguli G & XN complementum anguli D. & angulus X complementum est lateris GD ad semicirculum. Quare mutatis angulis in latera, & lateribus in angu- los; eadem est operatio quæ est in ca- su 11 hujus, cum arcus & eorum com- plementa ad semicirculos habeant eof- dem sinus.

D E

D E

Natura & Arithmetica

LOGARITHMORUM

P R Æ F A T I O.

Ingens olim compendium accepit *Mathesis*, primo *characterum Indicorum*, deinde *Fractionum decimalium* introductione; non minus tamen adjumenti ex *Logarithmis*, quam ex utroque invento, ei accessit: quorum quidem usum, per omnes disciplinas mathematicas latissime patentem, quis iis studiis vel leviter imbutus ignorat? Horum ope numeri fere immensi & alias plane intrastabiles sine ullo tædio in ordinem coguntur: presentissimum horum auxilium ubique conspicitur, siue cursum navis dirigat *Nauta*, siue curvarum altiorum indolem investiget *Geometra*, siue stellarum loca exquirat *Astronomus*, siue alia naturæ phænomena explicet *Physicus*, siue demum pecuniæ ex usuris incrementum computet *Nummatus*.

Argumento, in quo versatur hic libellus, illustrando non defuerunt viri in re *Mathematica* primarii. Sed eorum alii omnem illius ambitum complexi, doctissime illi quidem, sed magistris solum scripserunt: alii ad *Tyronum* captum se accommodantes, certas quasdam, easque magis obvias *Logarithmorum* proprietates selexerunt, intimam eorum naturam non aperuerunt. Quod igitur adhuc desiderari videbatur, mihi in animo erat supplere hoc tractatu, qui in id præcipue collimat, ut *Logarithmorum* scientia iis, qui ultra *Arithmeticæ* speciosæ & *Geometriæ* elementa non processerunt, penitus aliquando pateat.

Mirabile

Mirabile Logarithmorum Inventum Nepero Scoti Merchestonii Baroni debetur, qui primus canonem Logarithmorum descripsit, construxit, & edidit, Edinburg Anno 1614. Hunc statim omnes Mathematici, ejus utilitatem suspicientes, grati arripuerunt. Et cum de aliis fere omnibus præclaris Inventis plures contendunt Gentes, omnes tamen Neperum Logarithmorum authorem agnoscunt, qui tanti inventi gloria solus sine æmulo fruatur.

Aliam deinde magis commodam Logarithmorum formam Neperus excogitavit, & communicato consilio cum Domino Henrico Briggio, Geometriæ in Academia Oxoniensi Professore, hunc socium operis sibi adjunxit, ut Logarithmos in meliorem formam redactos compleret. Sed Nepero demortuo, totum quod restabat onus in Briggio devolutum est, qui magno labore, & summa qua pollebat ingenii subtilitate, canonem Logarithmicum secundum novam illam formam composuit, pro viginti primis numerorum chiliadibus (seu ab 1 usque ad 20000) aliisque undecim ab 90000 usque ad 101000, pro quibus omnibus numeris, supputavit Logarithmos quatuordecim figurarum locis constantes. Hic canon editus est Londini anno 1624.

Eundem Canonem iterato edidit Goudæ apud Batavos, anno 1628. Adrianus Vlacq, suppletis, ut docuerat Briggs, chiliadibus intermediis prius omissis; sed brevioribus usus est Logarithmis, utpote qui ad decem tantum figurarum loca continuantur.

Computavit etiam Briggs Logarithmos Sinuum & Tangentium, pro singulis Gradibus graduumque centesimis, ad 15 figurarum loca, quibus adjunxit sinus Tangentes & secantes veros seu naturales, quos prius ad totidem loca supputaverat. Logarithmi sinuum & Tangentium dicuntur sinus & Tangentes Artificiales. ipsi vero sinus & Tangentes, naturales vocantur. Has Tabulas simul cum Tractatu de Tabularum constructione & usu, post mortem Briggsii, sub nomine Trigonometriæ Britannicæ edidit Henricus Gelibrand Londini Anno 1633.

Post illud tempus, pluribus in locis Tabularum compen-

dia pro
garithm
meroru
usque
sunt.

Har
quam
entis, q
winus
editis,
um ab
constan
proport
meroru
tenus
exprim
gentes
tis pr
quibus

dia prodire. In quibus sinus Tangentes, eorumque Logarithmi, tantum constant septem notarum locis, & numerorum Logarithmi exhibentur tantum pro numeris ab 1 usque ad 10000, qui pro plerisque casibus sufficere possunt.

Harum Tabularum dispositio ea mihi videtur optima, quam primus excogitavit Nathaniel Roe Anglus Suffolciensis, quamque, quibusdam in melius mutatis, sequitur Sherwinus in Tabulis suis Mathematicis Londini Anno 1705 editis, in quibus habentur Logarithmi Numerorum omnium ab unitate usque ad 101000 septem figurarum notis constantes, Logarithmorum quoque differentiae partesque proportionales adscribuntur, quarum ope Logarithmi numerorum usque ad 10000000 facile haberi possunt: quatenus scilicet hi Logarithmi septem tantum figurarum notis exprimantur. Præterea in iisdem prostant Sinus Tangentes & Secantes, cum eorum Logarithmis & differentiis pro quolibet gradu & minuto Quadrantis, cum aliis quibusdam tabulis Mathesi Practicæ inservientibus.

CAPUT I.

De ortu & natura Logarithmorum.

Quemadmodum in Geometria, linearum magnitudines numeris sæpe definiuntur; ita quoque in Arithmetica vicissim expedit, ut numeri aliquando per lineas exponantur, assumendo scil. lineam aliquam quæ ipsa unitatem repræsentet, ejus dupla numerum binarium, tripla ternarium, dimidia fractionem $\frac{1}{2}$, & ita deinceps, exponet. Hac ratione quorundam numerorum Genesis & proprietates melius concipiuntur, clariorque in animo versantur, quam per abstractos numeros fieri possit.

Hinc si quælibet linea a in seipsam ducatur, (*Fig. I.*) quæ exinde prodit quantitas a^2 , non æstimanda est tanquam duarum dimensionum, sive ut Quadratum Geometricum cujus latus est linea a , sed tanquam linea quæ sit tertia proportionalis lineæ pro unitate assumptæ, & lineæ a . Sic etiam si a^2 per a multiplicetur, quæ prodit a^3 non erit trium dimensionum quantitas, seu cubus Geometricus, sed linea quæ est quartus terminus in progressionem Geometricam cujus primus terminus est 1 secundus a . Nam termini 1 a a^2 a^3 a^4 a^5 a^6 a^7 &c. sunt in continua ratione 1 ad a : & indices terminis affixi ostendunt locum seu distantiam, quam quisque terminus ab unitate obtinet. v. gr. a^5 est in quinto loco ab unitate, a^6 in sexto seu sexies magis distans ab unitate quam a seu a^1 , qui immediate sequitur unitatem.

Si inter terminos 1 & a inferatur medius proportionalis qui est $\sqrt{a}$, ejus index erit $\frac{1}{2}$, nam ejus distantia ab unitate erit semissilis distantie a ab unitate, adeoque pro $\sqrt{a}$ scribi potest $a^{\frac{1}{2}}$. Et si inter a & a^2 inferatur medius proportionalis, ejus index erit $1\frac{1}{2}$ seu 3 , nam ejus distantia erit sesquialtera distantie ipsius a ab unitate.

Si inter 1 & a inferantur duo medii proportionales;

horum

horum
esse $\frac{1}{3}$.
parte

bet per
non di

Ead
contin
nistran

$\frac{1}{a^5} \frac{1}{a^4}$
dem p
ipsum
distan

mini

pro q
 a^{-2} ,
unitat

a^{-2}

negat
disce
termi

Si

2.)

AG

pun

pend

quæ

repre

AG

unita

quise

obtin

recta

si m

cum

horum primus est radix cubica ipsius a , cujus index debet esse $\frac{1}{3}$. Nam terminus ille distat ab unitate tertiâ tantum parte distantiae ipsius a , adeoque radix cubica scribi debet per $a^{\frac{1}{3}}$. Hinc Index ipsius Unitatis est 0, nam unitas non distat à seipsâ.

Eadem series quantitatum Geometrice proportionalium continuari potest utrinque, tam descendendo versus sinistram, quam ascendendo versus dextram; termini enim

$\frac{1}{a^5} \frac{1}{a^4} \frac{1}{a^3} \frac{1}{a^2} \frac{1}{a} \quad 1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \quad a^4 \quad a^5$ &c. sunt omnes in ea-

dem progressionem Geometricam. Adeoque cum distantia ipsius a ab unitate sit versus dextram & positiva seu $+1$, distantia æqualis in contrariam partem scil. distantia ter-

mini $\frac{1}{a}$ erit negativa seu -1 , qui erit index termini $\frac{1}{a}$

pro quo itaque scribi potest a^{-1} . Similiter in termino a^{-2} , index -2 ostendit terminum in secundo loco ab unitate versus sinistram locari, idemque valet terminus

a^{-2} ac $\frac{1}{a^2}$. Item a^{-3} est idem ac $\frac{1}{a^3}$. Indices enim hi

negativi ostendunt terminos ad quos pertinent, in partem discedere contrariam ei, qua ab unitate progrediuntur termini, quorum indices sunt positivi. Hisce præmissis.

Si super lineam AN utrinque indefinite extensâ, (*Fig. 2.*) capiantur $AC CE EG GI IL$ dextrorsum. Item $AG \Gamma \Pi$ &c. sinistrorsum, omnes inter se æquales: & ad puncta $\Pi \Gamma A C E G I L$ erigantur super AN perpendiculares rectæ $\Pi \Sigma \Gamma \Delta AB CD EF GH IK LM$ quæ sint omnes continue proportionales, numerosque representent, quorum AB sit unitas. Lineæ $AC AE AG AI AL - A\Gamma - A\Pi$ distantias numerorum ab unitate respective exponent, sive locum & ordinem quem quisque numerus in serie Geometrice proportionalium obtinet, prout ab unitate distat. Ita AG cum sit tripla rectæ AC , erit numerus GH in tertio ab unitate loco, si modo CD sit in primo, sic LM erit in quinto loco cum sit $AL = 5 AC$.

D

Quod

Quod si proportionalium extremitates $\Sigma \Delta B D F H$ $K M$ rectis lineis jungantur; figura $\Sigma \Pi L M$ fit polygonum pluribus aut paucioribus constans lateribus, prout plures aut pauciores in progressionem fuerint termini.

Si partes $A C C E E G G I I L$ bisecentur in punctis $c e g i l$ & rursus excitentur perpendiculares $c d e f g h i k l m$, quæ sint mediæ proportionales inter $A B C D$, $C D E F$, $E F G H$, $G H I K$, $I K L M$, nova orietur porportionalium series, cujus termini incipiendo ab eo qui proxime sequitur unitatem duplo plures sunt, quam in prima serie, & terminorum differentiarum minores fiunt, propiusque ad rationem æqualitatis accedunt termini quam prius; quin etiam in hac nova serie, rectæ $A L A C$ distantias terminorum $L M C D$ ab unitate exponent, scilicet cum $A L$ decies major sit quam $A c$; erit $L M$ decimus seriei terminus ab unitate, & ob $A e$ triplo majorem quam $A c$, erit $e f$ tertius seriei terminus, modo $c d$ sit primus: & inter $A B$ & $e f$ erunt duo medii proportionales, inter $A B$ vero & $L M$ erunt novem termini medii proportionales.

Quod si linearum extremitates $B d D f F h H$ &c. rectis jungantur, fiet novum polygonum, pluribus quidem, at brevioribus constans lateribus.

Si rursus distantiarum $A c c C C e e E$ &c. bisecari concipiantur, & inter binos quosque terminos, ad medias illas distantias inseri intelligantur medii proportionales, alia nova orietur proportionalium series, terminos ab unitate duplo plures continens quam prior. Terminorum vero differentiarum minores erunt; junctisque terminorum extremitatibus, numerus laterum polygoni augetur secundum numerum terminorum, minora autem erunt latera, ob diminutas terminorum à se invicem distantias.

Quin in hac nova serie, distantiarum $A L A C$ &c. determinabunt terminorum ordines seu locos, nempe si sit $A L$ quintuplo major quam $A C$; sitque $C D$ quartus ab unitate seriei terminus: erit $L M$ istius seriei terminus vicessimus ab unitate.

Si sic continuo inter binos quosque terminos inserantur medii proportionales, fiet tandem numerus terminorum

rum seriei, sicut & laterum polygoni major quolibet dato numero seu infinitus; latera vero singula magnitudine diminuta fient quavis datâ rectâ lineâ minora; Adeoque mutabitur polygonum in figuram curvilineam. Nam quælibet figura curvilinea considerari potest, tanquam polygonum cujus latera sunt numero infinita, & magnitudine minima.

Curva sic descripta dicitur *Logarithmica*, in qua si numeri per rectas ad axem AN normaliter insistentes, represententur. Portio Axis inter numerum quemlibet, & Unitatem intercepta, ostendit locum seu ordinem quem numerus ille obtinet in serie Geometrice proportionalium, & æqualibus intervallis ab invicem distantium. Verbi gratia, si AL sit quintuplo major quam AC , sintque ab unitate ad LM mille termini continue proportionales, erunt ab unitate ad CD ducenti termini ejusdem seriei, seu erit CD terminus seriei ducentessimus ab unitate; & quicumque supponatur numerus terminorum ab AB ad LM , erit istius numeri pars quinta numerus terminorum ab AB ad CD .

Curva Logarithmica potest etiam concipi duobus modis describi, quorum unus æquabilis est, alter vero in data quadam ratione acceleratur, vel retardatur: v. gr. si recta AB super AN uniformiter incedat, adeo ut terminus ejus A æqualibus temporibus, æqualia spatia describat, interea tamen ita crescat AB , ut æqualibus etiam temporibus, incrementa capiat, quæ sint toti lineæ crescenti proportionalia, hoc est si AB progrediendo in cd , augeatur parte sui od , & hinc æquali tempore quando in CD pervenerit, augeatur simili parte Dp , quæ sit ad dc ut incrementum do ad AB , similiter, dum æquali tempore ad ef pervenerit, crescat parte fq , quæ sit ad DC ut Dp ad dc seu ut do ad AB , id est, in æqualibus temporibus, incrementa facta sint semper totis proportionalia.

Vel si linea AB regrediendo in contrariam partem, in constanti ratione minuat, ita ut, dum æqualia spatia AG GP pertransit, decrementsa patiat $AB - \Gamma \Delta$ $\Gamma \Delta - \Pi \Sigma$ quæ sint ipsis AB $\Gamma \Delta$ proportionalia. Lineæ sic crescentis aut decrescens terminus Logarithmicam describet.

Nam cum fit $AB:do::dc:Dp::DC:fq$ erit componendo $AB:dc::dc:DC::DC:fe$ & ita deinceps.

Per hos duos motus, unum scil. æquabilem, alterum proportionaliter acceleratum aut retardatum, ipse *Neperus* Logarithmorum originem exposuit, Logarithmum finis cujusque arcus vocavit. *Numerum qui quam proximè definit lineam quæ æqualiter crevit, interea dum finis totius linea proportionaliter in finem illum decrevit.*

Ex hac Logarithmicæ descriptione constat, numeros omnes in æqualibus distantis, esse continue proportionales. Quin etiam patet, quod si sint quatuor numeri $AB\ CD\ IK\ LM$ tales, ut distantia inter primum & secundum sit æqualis distantiae inter tertium & quartum, qualiscunque sit distantia secundi à tertio, erunt illi numeri proportionales. Nam quia distantiae $AC\ IL$ sunt æquales, erit AB ad incrementum DS ut IK ad incrementum MT ; unde componendo $AB:DC::IK:ML$. Et vicissim, si quatuor numeri sint proportionales, erit distantia inter primum & secundum, æqualis distantiae inter tertium & quartum.

Distantia inter duos quoslibet numeros, dicitur Logarithmus rationis istorum numerorum, & metitur non quidem ipsam rationem, sed numerum terminorum in data serie Geometrice proportionalium progredientium ab uno numero ad alterum, definitque numerum rationum æqualium, quarum compositione efficitur numerorum ratio.

Si distantia inter duos quosvis numeros sit dupla distantiae inter alios duos numeros; Ratio duorum priorum numerorum erit duplicata rationis posteriorum. Sit enim distantia IL inter numeros $IK\ LM$ dupla distantiae Ac quæ est inter numeros $AB\ cd$, bisecta IL in l ob $Ac=Il=lL$, erit ratio IK ad lm æqualis rationi AB ad cd , adeoque ratio IK ad LM quæ est duplicata rationis IK ad lm , (per *defin.* 10. *El.* 5.) erit etiam duplicata rationis AB ad cd .

Similiter si distantia EL sit tripla distantiae AC ; erit Ratio EF ad LM triplicata rationis AB ad CD . Nam ob distantiam triplam, triplo plures erunt proportionales
ab

ab EF ad LM quam sunt ejusdem rationis termini ab AB ad CD, at tam ratio EF ad LM, quam ratio AB ad CD, componitur ex rationibus æqualibus intermediis, (per 5. *defn. El.* 6.) Adeoque ratio EF ad LM ex triplo pluribus rationibus composita, Triplicata erit rationis AB ad CD. Similiter si sit GL distantia quadrupla distantiae AC, erit ratio GH ad LM Quadruplicata rationis AB ad CD. & ita deinceps.

Numeri cujuslibet Logarithmus, est Logarithmus rationis Unitatis ad ipsum numerum, vel est distantia inter unitatem & illum numerum. Logarithmi itaque exponunt dignitatem, locum, seu ordinem, quem quisque numerus obtinet ab unitate in serie Geometrice proportionalium. Verbi gratia si ab unitate ad numerum 10 sint proportionales numeri 10 000 000 hoc est si sit numerus 10 in loco 10 000 000^{mo}; per computationem invenietur, esse in eadem serie ab unitate usque ad 2 proportionales terminos numero 3 010 300, hoc est numerus binarius stabit in loco 3 010 300^{mo}. Similiter ab unitate usque ad 3, invenientur termini proportionales 4 771 213, qui numerus definit locum numeri ternarii. Numeri 1 000 000 000, 3 010 300, 4 771 213. erunt Logarithmi numerorum 10, 2, & 3.

Si primus seriei terminus ab unitate dicatur y , erit secundus terminus y^2 , tertius y^3 , &c. cumque ponitur numerus denarius seriei terminus 10 000 000^{mus}, erit $y^{1000000} = 10$. Item erit $y^{3010300} = 2$. Item $y^{4771213} = 3$, & ita deinceps.

Omnes itaque numeri erunt potestates aliquæ illius numeri, qui est ab unitate primus. Et potestatum indices sunt numerorum Logarithmi.

Cum Logarithmi sint distantie numerorum ab unitate, ut superius ostensum est. Erit Logarithmus ipsius unitatis 0, nam unitas non distat à se ipsa. At fractionum Logarithmi sunt negativi seu infra nihil descendentes, hi enim in contrariam discedunt partem, adeoque si numeri ab unitate proportionaliter crescentes habeant Logarithmos positivos, seu signo + affectos, Numeri ab unitate
D 3 similiter

similiter decrecentes, seu fractiones habebunt Logarithmos negativos, seu signo — affectos. Quod verum est quando Logarithmi æstimantur per distantias numerorum ab unitate.

At si initium capiunt Logarithmi non ab unitate integrali, sed ab unitate quæ est in loco aliquo fractionum decimalium, verbi gratia à fractione $\frac{1}{1\ 00000\ 00000}$; tunc

omnes fractiones hac majores habebunt Logarithmos positivos, reliquæ minores, obtinebunt Logarithmos negativos, sed de hac re plura postea dicentur.

Cum in numeris continue proportionalibus DC EF GH IK &c. distantia CE EG GI &c. sint æquales, erunt horum numerorum logarithmi AC AF AG AI &c. æquidifferentes, seu Logarithmorum differentia erunt æquales. Numerorum itaque proportionalium Logarithmi sunt omnes in progressionem Arithmetica. Atque hinc oritur vulgaris illa Logarithmorum definitio, viz. Logarithmi sunt numeri qui proportionalibus adjuncti, æquales servant differentias.

In prima quam *Neperus* edidit Logarithmorum specie, posuit terminorum proportionalium ab unitate primum, tantum ab unitate distare, quantum ipse terminus unitatem superabat. h. e. Si *vn* sit primus seriei terminus ab unitate AB, ejus Logarithmum seu distantiam A*n* vel B*y* æqualem esse voluit ipsi *vy*, seu incremento numeri supra unitatem, ut si *vy* sit 1,0000001, ejus Logarithmum A*n* ponebat 0,0000001, & hinc computatione factâ Numerus Denarius seu 10 erit 23025850^{us} seriei terminus, qui itaque numerus est Logarithmus denarii in hac Logarithmorum forma, & exprimit ejus distantiam ab unitate in partibus quarum *vy* vel A*n* est una.

At hæc positio omnino arbitraria fuit, potest enim distantia primi termini, ad ipsius excessum supra unitatem, datam quamvis habere proportionem, & pro varia illa ratione, quæ pro arbitrio supponi potest, esse inter *vy* & B*y*, incrementum primi termini supra unitatem & ejus-

dem

dem ab unitate distantiam, diversæ provenient Logarithmorum formæ.

Primam hanc Logarithmorum speciem in aliam magis commodam postea mutavit *Neperus*, in qua posuit numerum denarium non esse 23025850^{mum} seriei terminum, sed terminum 10000000^{mum} , inque hac Logarithmorum forma, primum incrementum vy erit ad distantiam By vel An , ut unitas seu AB ad fractionem decimalem, $0,4342994$, quæ itaque exponet Longitudinem subtangentis AT . *In Fig. 4^{ta}.*

Post mortem *Neperi*, vir summus Dominus *Henricus Briggs*, immenso labore, Logarithmorum Tabulas ad hanc formam construxit & edidit. In hisce tabulis cum logarithmus denarii seu ejus distantia ab unitate ponitur $1,0000000$, sintque $1, 10, 100, 1000, 10000$ &c. continue proportionales, erunt æquidistantes. Quare numeri 100 Logarithmus erit $2,0000000$. millenarii $3,0000000$ & numeri 10000 Logarithmus fiet $4,0000000$ & ita deinceps.

Hinc Logarithmi omnium numerorum inter 1 & 10 incipere debent per 0 , seu debet esse 0 in primo loco versus sinistram, sunt enim minores quam Logarithmus numeri 10 cujus initium est unitas; & Logarithmi numerorum inter 10 & 100 unitate incipiunt, sunt enim majores quam 1.0000000 & minores quam 2.0000000 . Item Logarithmi numerorum inter 100 & 1000 binario incipiunt, sunt enim majores quam logarithmus numeri 100 , quem incipit 2 , & minores logarithmo numeri 1000 qui incipit per 3 ; eodem modo ostendetur in Logarithmis numerorum inter 1000 & 10000 , primam figuram versus sinistram debere esse 3 ; & in Logarithmis numerorum ab 10000 usque ad 100000 prima versus sinistram figura erit 4 , & ita deinceps.

Prima cujusque logarithmi figura versus sinistram dicitur charactecistica seu index; quia ostendit altissimum seu remotissimum locum numeri à loco unitatum. v. gr. Si index logarithmi fit 1 , numeri respondentis altissimus seu remotissimus versus sinistram ab unitate locus, erit
locus

locus decadam. Si index 2, remotissima numeri respondentis figura erit in secundo ab unitatum loco, hoc est erit centenariorum aliquis. Et index Logarithmi 3 denotat altissimam numeri sui figuram esse in tertio ab unitatum loco, & inter millenarios locari.

Logarithmi numerorum omnium qui sunt in progressionem decupla aut subdecupla, caracteristicis seu indicibus suis tantum differunt; in reliquis omnibus locis, iidem scribuntur notis, v. gr. Logarithmi numerorum 17, 170, 1700, 17000. nam cum sit 1 ad 17, ut 10 ad 170, ut 100 ad 1700, ut 1000 ad 17000; distantia inter 1 & 17, inter 10 & 170, inter 100 & 1700, inter 1000 & 17000 erunt omnes æquales, adeoque cum distantia inter 1 & 17 seu Logarithmus numeri 17 sit 1.2304489 erit logarithmus numeri 170 = 2.2304482, & Logarithmus numeri 1700 erit 3.2304489 ob numeri 100 Logarithmum = 2.0000000, & similiter ob numeri 1000 Logarithmum = 3.0000000 Logarithmus numeri 17000 erit 4.2304489.

Sic etiam numeri 6748. 674, 8. 67, 48. 6, 748. 0,6748, 0,06748. sunt continue proportionales scil. in ratione

6748	3,8291751
674,8	2,8291751
67,48	1,8291751
6,748	0,8291751
0,6748	—1,8292751
0,06748	—2,8291751

10 ad 1, eorum itaque à se invicem distantia æquales erunt distantia seu Logarithmo numeri 10, seu æquales 1,0000000. quare cum Logarithmus numeri 6748 sit 3,8291751, reliquorum logarithmi erunt ut in margine.

In duobus ultimis logarithmis, Indices tantum sunt negativi, reliquis figuris positivis manentibus, adeoque cum reliquæ figuræ addendæ sunt, subtrahendi erunt indices, & vice versa.

CAPUT II.

De Logarithmorum Arithmetica ubi numeri sunt integri, vel integricum decimalibus adjunctis

Q Uoniam in multiplicatione, unitas est ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum, distantia inter Unitatem & multiplicatorem æqualis erit distantia inter multiplicandum & productum; si itaque numerus GH per numerum EF esset multiplicandus, distantia inter GH & productum debet esse æqualis distantia AE, seu Logarithmo multiplicatoris, si itaque capiatur GL æqualis AE, erit numerus LM productus, hoc est, si ad AG logarithmum multiplicandi addatur AE Logarithmus multiplicatoris, summa erit logarithmus producti.

In Divisione Unitas est ad divisorem, ut quotus ad dividendum; adeoque distantia inter divisorem & unitatem æqualis erit distantia inter dividendum & quotum. Sic si LM per EF esset dividendus, erit distantia EA æqualis distantia inter LM & quotum, adeoque si capiatur LG æqualis EA, ad G erit quotus. Hoc est, si ab AL logarithmo Dividendi, auferatur GL seu AE Logarithmus divisoris, restabit AG Logarithmus quotientis.

Atque hinc adeo, quæcunque operationes in communi Arithmetica perficiuntur multiplicando aut dividendo numeros majores, ex omnes facilius multo, & expeditius fiunt, per additionem aut subtractionem Logarithmorum.

Sit exempli gratia numerus 7589 multiplicandus per 6757 addendo Logarithmos ut in margine videre est, habetur Logarithmus producti, cujus index 7 monstrat esse in producto septem locos præter unitatum locum; & quærendo in tabulis Logarithmum hunc, vel proxime æqualem, invenio

Log. 3. 8801846

Log. 3. 8297539

Log. 7. 7099385

venio numerum respondentem minorem producto esse 51278000 & numerum producto majorem esse 51279000, quin capiendo differentias adjunctas, & partes proportionales; invenio notas ante-penultimam & penultimam esse 87, in ultimo autem seu in unitatum loco, necessario erit 3, ob septies novem = 63 adeoque verus productus erit 51278173. Si index Logarithmi esset 8 vel 9, ultima vel penultima notæ obtineri non possint ex tabulis ubi Logarithmi tantum constant 7 figurarum locis præter characteristicam, adeoque ubi opus est, Tabulæ *Ulacquiana*, in quibus Logarithmi sunt omnes decem notarum; vel *Briggiana*, in quibus Logarithmi sunt quatuordecim, adeundæ erunt.

Si numerus 78956 dividendus sit per 278, subtrahendo Logarithmum divisoris ex Logarithmo dividendi habetur Logarithmus quotientis, cui Logarithmo respondet, Numerus 282,719 qui itaque erit quotiens.

Cum unitas, numerus quilibet assumptus, ejus quadratus, cubus, Biquadratus, &c. sint continue proportionales, eorum à se invicem distantia æquales erunt. Manifestum itaque est Quadrati distantiam ab unitate, duplam esse distantia radice ab eadem: distantiam cubi triplam distantia radice suæ, Biquadrati distantiam esse distantia radice suæ ab unitate quadruplam &c. Adeoque si duplicetur logarithmus numeri, dabitur logarithmus Quadrati, Si Triplicetur, logarithmus cubi, si quadruplicetur, prodit Logarithmus Biquadrati. Et vice versa si Logarithmus numeri alicujus bisecetur, habebitur Logarithmus Radicis quadratæ ejusdem numeri, Quin & ejusdem logarithmi tertia pars erit logarithmus Radicis Cubicæ, & pars quarta Logarithmus Radicis biquadraticæ, & ita deinceps.

Hinc Radicum omnium extractiones facillime perficiuntur, secando Logarithmum in tot partes, quot sunt unitates in indice potestatis. Sic ut habeatur Radix quadrata numeri 5, ejus Logarithmi capiatur pars dimi-

dia o. 3
numeri
merus 2

De

QU
d
garith
garith
tate, 9
cimali

arithmo
distabi
eadem
portio
eoque
fitione
stantia
nume
meri
erit
stanti
garith
Fra
&c.

At
mera
adje
mino
unit
mus
mus

dia 0.3494850, erit hæc Logarithmus radicis quadratæ numeri 5, seu Logarithmus numeri $\sqrt{5}$, cui respondet numerus 2; 23606 quam proxime.

CAPUT III.

De Arithmetica Logarithmorum, ubi numeri sunt Fractiones.

Vide Fig. 3.

Quotiescunque Fractiones per Logarithmos tractandæ fuerint, ad vitandum laborem addendi unam Logarithmi partem, & subducendi alteram, expedit ut Logarithmi incipiant non ab unitate integrali, sed ab unitate, quæ sit in decimo vel centesimo loco fractionum decimalium, v. gr. pone PO esse $\frac{1}{10000000000}$ & Logarithmos ab ejus loco incipere. Hæc fractio decies magis distabit ab unitate versus sinistram, quam numerus 10 ab eadem distat versus dextram, sunt enim Decem termini proportionales in ratione 10 ad 1 ab unitate usque ad PO. Adeoque si AB sit unitas, ejus Logarithmus in hac suppositione non erit 0, sed erit OA = 10.0000000, Nam distantia denarii ab unitate est 1.0000000, unde distantia numeri 10 ab PO erit 11.0000000. Item distantia numeri 100 à PO, seu ejus Logarithmus à PO incipiens, erit 12.000 0000 & numeri 1000 Logarithmus seu distantia à PO erit 13.000 0000; atque hac ratione Logarithmorum omnium indices augentur numero 10. & Fractiones quorum indices fuerunt — 1, aut — 2, aut — 3 &c. fiunt 9, 8, aut 7 &c.

At si Logarithmi incipiunt à loco Fractionis cujus numerator est unitas; denominator unitas centum cyphris adjectis (quod faciendum est quoties fractiones occurrunt minores quam PO) illa Fractio centies plus distabit ab unitate quam 10 ab ea distat, adeoque Unitatis Logarithmus habebit Indicem 100. Numeri Denarii Logarithmus Indicem habebit 101. Et numeri centenarii Logarithmo

rihmo congruet Index 102, & ita deinceps Indices omnes augentur numero 100.

Fractionum omnium quæ sunt majores P O (à quo initium ducitur) Logarithmi erunt positivi. Et cum numeri, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. sunt in continua progressione Geometrica, æqualiter à se invicem distabunt, & eorum proinde Logarithmi erunt æquidifferentes; Adeoque cum Logarithmus denarii sit 11.0000000, & unitatis Logarithmus sit 10.0000000 erit Logarithmus fractionis $\frac{1}{10} = 9.0000000$; & fractionis $\frac{1}{100}$ Logarithmus erit 8.0000000; & similiter index Logarithmi numeri $\frac{1}{1000}$ erit 7. Quin etiam eadem ratione si index Logarithmicus Unitatis sit 100 & denarii 101, Erit index Logarithmi Fractionis $\frac{1}{10}$ 99, & Fractionis $\frac{1}{100}$ Index Logarithmi erit 98; & Fractionis $\frac{1}{1000}$ index Logarithmicus erit 97 &c. Hi indices ostendunt in quo loco ab unitate prima fractionis figura quæ cyphra non sit, ponenda fuerit. v.gr. Si index sit 4 ejus differentia ab indice unitatis quæ est 10 scil. 6 ostendit primam decimalis figuram significativam esse in 6^{ta} ab unitate loco; ergo quinque cyphræ versus sinistram ei præponendæ sunt. Ita si Unitatis index sit 100 & fractionis index sit 80, erit prima ejus figura in vicesimo ab unitatis loco seu 19 cyphræ præponendæ erunt.

Sit jam Fractio GH per fractionem DC multiplicanda. Quia unitas est ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum; erit distantia inter Unitatem & multiplicatorem æqualis distantie inter multiplicandum & productum. Quare si capiatur GI = AC, ad I erit productus IK. Et proinde si ab OG Logarithmo multiplicandi, auferatur GI vel AC, restabit OI Logarithmus producti. Est vero AC = OA - OC, quæ ablata ab OG, relinquetur OG + OC - OA = OI, hoc est, si simul addantur Logarithmi multiplicatoris & multiplicandi, & è summa auferatur Logarithmus unitatis (qui semper scribitur per 10 aut 100 cum cyphris) habebitur logarithmus producti. ex. gr. Sit Fractio decimalis 0,00734 per fractionem 0,000876 multiplicanda, pono unitatis indicem Logarithmicum esse 100, & fractionum Logarithmi erunt

ut in margine, qui additi, & rejecto Logarithmo Unitatis, dant Logarithmum producti, cujus index 94 ostendit primam figuram esse in sexto ab unitatum loco, quinque itaque cyphræ præponendæ sunt, & productus erit, 00000642984.

In Divisione, Divisor est ad unitatem, ut dividendus ad quotum, & proinde distantia inter divisorem & unitatem, æqualis erit distantie inter dividendum & quotum. Itaque si fractio IK dividenda esset per DC, capienda erit IG = CA & locus quoti erit G. Est vero CA = OA - OC quæ ad OI addita fit OA + OI - OC = OG. hoc est si addatur Logarithmus unitatis ad Logarithmum dividendi, & à summa auferatur Logarithmus divisoris, restabit logarithmus quotientis; sic si numerus CD per IK esset dividendus, capienda erit distantia CS = IA, & erit ST quotiens; cujus Logarithmus est OA + OC - OI. Sit CD = 0,347 IK = 0,00478. ad logarithmum ipsius CD addatur Logarithmus Unitatis, hoc est ejus Indici præponatur 1 aut 10, & ex eo subducatur logarithmus divisoris, restabit Logarithmus quotientis, cujus index 11 monstrat

97,8656961

96,9425041

94,8082002

19,5403295

7,6794279

11,8609016

quotientem esse inter numeros qui sunt à 10 ad 100. quæro itaque numerum logarithmo respondentem, quem invenio esse 72,549. Si fractionis vulgaris verbi gr. $\frac{7}{8}$ logarithmus desideretur, ad Logarithmum numeri 7 addatur Logarithmus unitatis, vel quod idem est, ejus indici præponatur 1 aut 10 & subducatur ab eo logarithmus denominatoris 8, restabit logarithmus fractionis $\frac{7}{8}$ vel fractionis decimalis, 875.

10,8450980

0,9030900

9,9420080

Ut Fractionis cujuslibet DC potestates habeantur, Capiendæ sunt EC EG GI IL singulæ æquales AC, & EF erit quadratus, GH Cubus, IK biquadratus numeri DC, sunt enim ab unitate continue proportionales. Est præterea AF = 2 AC = 2 OA - 2 OC, unde OE = OA - AE = 2 OC - OA, hoc est logarithmus quadrati

drati est duplus logarithmi radice, minus Logarithmo unitatis. Similiter ob $AG = 3$ $AC = 3$ $OA - 3$ OC erit $OG = OA - AG = 3$ $OC - 2$ $OA =$ Logarithmo cubi $=$ Triplo Logarithmi lateris minus duplo logarithmi unitatis. Eadem ratione, quia $AI = 4$ $AC = 4$ $DA - 4$ OC , erit $OI = 4$ $OC - 3$ OA ; qui est Logarithmus Biquadrati. Et universaliter fractionis potestas sit n , logarithmus L , erit logarithmus potestatis $n = nL - nOA + OA$. hoc est multiplicando logarithmum fractionis per n , & è producto abjiciendo logarithmum unitatis multiplicatum per $n - 1$, habebitur logarithmus potestatis ejusdem fractionis.

Ex. gr. sit Fractio $\frac{1}{20} = .05$ cujus quærat potestas 6^{ta} hujus fractionis logarithmus est 8, 6989700 qui multiplicatus per 6 dat numerum 52, 1938200, & ex 52 ablato numero 50 qui est index Logarithmi unitatis in 5 ductus, restabit logarithmus potestatis 6^{ta} scil. 2, 1938200 cui respondet numerus 0000000 15625. nam index 2 ostendit septem cyphras primæ figuræ præponendas esse.

Si Fractionis, .05 potestas octava desideretur, multiplicando logarithmum per 8, prodit 69, 5917600, at cum ex numero 69 auferri non potest 70, qui est septies index logarithmi unitatis, Quin in numeros negativos deveniatur, pono indicem logarithmi unitatis esse 100. & index logarithmicus fractionis, erit 98. hic logarithmus in 8 ductus dat 789. 5917600 & ex numero 789 rejecto numero 700, qui utpote cum cyphris annexis, est septies logarithmus unitatis, restabit 89. 5917600 logarithmus potestatis 8^{va} Fractionis $\frac{1}{20}$ cui congruens numerus est 00000 00000 39062, nam cum Index sit 89 & ejus differentia ab 100 est 11; figura prima fractionis significativa erit in undecimo ab unitatis loco, adeoque decem cyphræ præponendæ erunt.

Si in fractionibus, radices potestatum desiderentur. v. gr. Fractionis EF , quærat radix quadrata. Quoniam Radix est media proportionalis inter Fractionem & unitatem; bisectâ AE in C , erit CD radix quadrata fractionis

tionis EF. Est vero $AC = \frac{1}{2} AE = \frac{OA - OF}{2}$, Adeo-

que OC Logarithmus Radicis $= OA - AC = \frac{OA + OF}{2}$.

Si fractionis GH radix cubica quærat. Radix illa erit prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & GH, secetur itaque AG in tres partes æquales, quarum prima sit AC, erit CD radix quæsitæ, & quoni-

am est $AC = \frac{1}{3} AG = \frac{OA - OG}{3}$ si hac subducatur ab

OA, restabit $\frac{2OA + OG}{3} = OC$ scil. Logarithmo Ra-

dicis cubicæ fractionis GH. Sic etiam fractionis IK radix biquadratica habetur, secando AI in quatuor partes æquales. Nam Radix est prima trium mediarum proportionalium inter unitatem & Fractionem. Sit itaque $AC = \frac{1}{4} AI$, & erit CD Radix biquadratica Fractionis

IK. Sed est $\frac{1}{4} AI = \frac{OA - OI}{4}$ adeoque $OC = OA -$

$AC = \frac{3OA + OI}{4}$.

Universaliter si fractionis LM desideretur radix potestatis n , ejus radice Logarithmus erit $\frac{nOA - OA + OL}{n}$,

hoc est si indici Logarithmico fractionis, præponatur numerus $n - 1$, & logarithmus sic auctus dividatur per n , quotus dabit Logarithmum radice quæsitæ. Sic si quærat. radix cubica fractionis $\frac{1}{2}$ sive, 5 hujus Logarithmo præponatur $2 = n - 1$, quia radix cubica desideratur, & fiet 29.6989700 cujus numeri triens est 9,8996566 æqualis Logarithmo radice cubicæ fractionis $\frac{1}{2}$ & congruens Logarithmo numerus est, 7937 qui erit radix quæsitæ.

CAPUT IV.

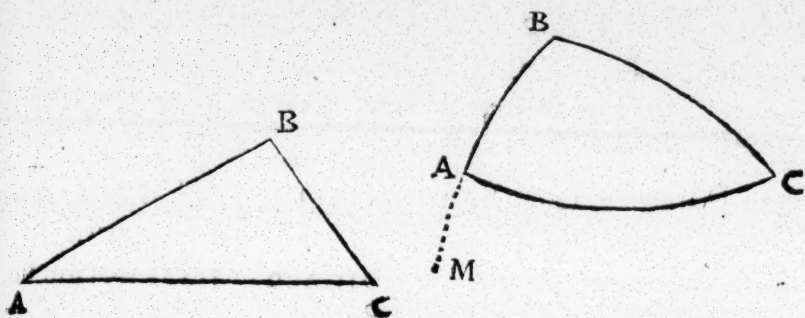
De Regula Proportionis seu Aurea Logarithmica.

DAtis tribus numeris, qua ratione quartus proportionalis inveniendus sit, nos docet proportionis Regula; scilicet termini secundus & tertius in se invicem ducti sunt, & productus dividendus est per primum, qui prodit quotus, exhibebit quartum terminum proportionalem quæsitum. At per logarithmos minore labore habetur ille quartus; Nam si è summa Logarithmorum secundi & tertii auferatur logarithmus primi, qui restat numerus est logarithmus quarti proportionalis.

Quin etiam & hic labor minui aliquantulum potest, si loco logarithmi primi capiatur ejus complementum Arithmeticum, seu differentia logarithmi à numero 10 000000, & obtinetur si pro singulis logarithmi figuris scribantur earum differentia à 9, Complementum hoc Arithmeticum cum reliquis duobus logarithmis in unam summam conjiciatur, & à summa, unitatis nota in primo versus sinistram loco sita abjiciatur, restabit logarithmus quarti termini quæsitum; atque hoc modo per unicam Numerorum trium additionem invenitur logarithmus termini quæsitum. Hujus rei causa hinc patebit. Sint tres numeri $A B C$ & è summa secundi & tertii subducendus est primus, non tantum operatio communi modo perficitur, sed etiam si assumatur numerus quivis E , & ab ea auferatur A , restabit $E - A$ si numeri $B C$ & $E - A$ in unam summam addantur, & è summa trium rejiciatur E , restabit $B + C - A$. sic si subducendus est nu-

85 merus 15 ex 23 capio numeri 15 complementum
23 ad 100 quod est 85, hunc numerum addo ad 23
108 & summa fit 108 ex quo sublato 100 restabit nu-
merus 8. sequuntur Exempla Trigonometrica Re-
gulæ proportionis per Logarithmos soluta.

Sic



Sit Triangulum ABC rectilineum, in quo dantur angulus A 36 gr. $46'$. angulus B 98 gr. $32'$. & latus BC , 3478 . & quæritur latus AC . Fiat (per *cas. I*. Trigon. Planæ)

Sinus ang. A ad Sinum

ang. B ut BC ad AC . Et

quia sinus Log. anguli

A est primus analogiæ

terminus ejus vice sub-

stituto complementum A-

rithmeticum ejusdem, & addo Log. BC , Log. S, B & præ-

dictum complementum in unam summam, & è summa re-

jecta unitate quæ est in primo versus finistram loco, dabi-

tur Logarithmus lateris AC , cui congruens numerus est

$5706, 306$ æqualis AC lateri quæsito.

Sit Triangulum Sphæricum ABC , in quo dantur

omnia latera scil. $BC = 30$ grad. $AB = 24$ gr. $4'$. &

$AC = 42$ gr. $8'$. quæritur angulus B . Producatur BA ad

M ut sit $BM = BC$ erit AM differentia laterum BC

BA æqualis 5 gr. $56'$. (Per *cas. II*. in Triangulis obliquan-

gulis Sphæricis.) Fiat ut rectangulum sub sinibus crurum

AB BC ad quadratum Radii ita Rectangulum sub sinibus

$AC + AM$ $AC - AM$

Arcuum $\frac{AC + AM}{2}$ $\frac{AC - AM}{2}$ ad quadratum sinus an-

guli $\frac{1}{2} B$.

Est vero $\frac{AC + AM}{2} = 24$ gr. $2'$. & $\frac{AC - AM}{2} = 18$

gr. $6'$. Et quia primus analogiæ terminus est rectangulum

sub

E

sub

Arith. comp. S, B . 0.2228938

Log. Sin. B . 9.9951656

Log. BC . 3.5413296

Log. AC . 33.7593888

sub finibus AB BC, & secundus terminus est quadratum Radii; Summa Log. Sin. AB BC subducenda erit ex duplo Log. Radii & qui restat numerus addendus est ad summam Log. S $\frac{AC + AM}{2} \frac{AC - AM}{2}$. Quod idem erit. ac si singuli Log. Sinus arcuum AB BC subducerentur

Log. S, BC comp. Arith. 0. 3010299

Log. S, A B comp Arith. 0. 3898364

Log. S $\frac{AC + AM}{2}$ 9. 6098803

Log. S, $\frac{AC - AM}{2}$ 9. 4923083

2 Log. S, Ang. B. 19. 7930549

à Logarith. Radii, vel si horum finium capiantur complementa Arithmetica, Atq; complementa illa & prædicti finis in unam conjicerentur summam. Summa illa erit Logarithmus quadrati finis dimidii anguli B; logarithmi itaque dimidium 9. 8965274 est Log. Sinus anguli $\frac{1}{2}B = 51$ gr. 59". 56". & hujus anguli duplum erit 103 gr. 59". 52" = angulo E qui erat inveniendus.

rithmus quadrati finis dimidii anguli B; logarithmi itaque dimidium 9. 8965274 est Log. Sinus anguli $\frac{1}{2}B = 51$ gr. 59". 56". & hujus anguli duplum erit 103 gr. 59". 52" = angulo E qui erat inveniendus.

C A P U T V.

De Proportionalium Quantitatum continuis Incrementis, Et de modo inveniendi per Logarithmos, Terminum quemlibet in serie Proportionalium, sive crescente, sive decrescente.

SI in Axe Logarithmicæ ubivis capiantur partes quot volueris SV VY YQ &c. æquales, & ad puncta S V Y Q &c. erigantur perpendiculares ST VX YZ QΠ &c. ex natura curvæ, erunt omnes continuè proportionales, quin etiam continua incrementa Xx Zz Ππ erunt totis proportionalia. Nam ob ST:VX::VX:YZ::YZ:QΠ erit di-

Vide Fig. 3.

videndo

videndo $ST : Xx :: VX : Zz :: YZ : \Pi \pi$, & componendo $VX : Xx :: YZ : Zz :: Q\Pi : \Pi \pi$. Hinc si Xx sit pars quælibet rectæ ST , erit Zz eadem pars rectæ VX , & $\Pi \pi$ quoque eadem pars rectæ YZ . ex. gr. Si Xx sit $\frac{1}{20} ST$, erit $Zz = \frac{1}{20} VX$, & $\Pi \pi = \frac{1}{20} YZ$ seu quod eodem redit, erit $VX = ST + \frac{1}{20} ST$. $YZ = VX + \frac{1}{20} VX$, item $Q\Pi = YZ + \frac{1}{20} YZ$.

Fiat ut ST ad VX , ita AB unitas ad NR ; erit $AN = SV$; adeoque rectæ SV VY YQ &c. erunt singulæ æquales logarithmo ipsius NR , & AV Logarithmus termini VX erit æqualis $AS + AN =$ Logarithmo ipsius $ST +$ Logarithmo ipsius NR . Item AY Logarithmus termini YZ æqualis erit $AS + 2AN =$ Log. $ST + 2$ Log. NR , & AQ logarithmus Termini $Q\Pi$ æqualis erit $AS + 3AN =$ Log. $ST + 3$ Log. NR . Et universaliter si Logarithmus numeri NR multiplicetur per numerum, qui exprimit termini cujuscvis distantiam à termino primo, & productus addatur Logarithmo termini primi, dabitur logarithmus istius termini. At si series proportionalium sit decrescens; seu si termini in continua ratione minuantur, & $Q\Pi$ sit primus, habebitur Logarithmus alterius cujuscvis termini, multiplicando Logarithmum numeri NR per numerum qui exponit ejus termini distantiam à primo, & subducendo productum è Logarithmo primi. Quod si productus ille sit major Logarithmo primi termini initio ab unitate ducto; in eo casu ponendi sunt Logarithmi incipere ab unitate in aliquo fractionum Decimalium loco detrusâ, verbi gratia ab OP ita Logarithmus numeri $Q\Pi$ erit OQ .

Exponat jam LM quamvis pecuniam, seu pecuniæ summam à creditore Fœnori elocatam, ea lege ut singulis annis, Usura annua forti annumeretur, & finito primo anno, sit usura seu lucrum Kk , & IK aggregatum fortis & lucri pariat usuram Hb quæ sit ipsi IK proportionalis, seu in ratione constanti. Hæc usura Hb finito anno secundo, forti accedat, & fors ea sit GH , quæ ad finem anni tertii pariat usuram Ff , ipsi GH proportionalem; Ponamus sortem singulis annis augeri parte sui vice-

fima, $\frac{1}{20}$, adeoque erit $IK = LM + \frac{1}{20} LM$, $GH = IK + \frac{1}{20} IK$. $EF = GH + \frac{1}{20} GH$, & ita deinceps. Erunt proinde termini $LM IK GH EF$ &c. continue proportionales. Quæritur quantum aucta fuerit pecunia ad finem quotlibet annorum.

Sit LM semiobolas, Anglice *Afarthing*. Ob LM ad IK ut 1 ad $1 + \frac{1}{20}$ vel ut 1 ad $1,05$. ut AB ad NR , erit $NR = 1,05$, cujus Logarithmus AN est 0.0211893 , vel magis accurate 0.0211892991 . Quæritur quantum lucri accedat semiobolo, qui sexcentis annis fœnori expositus est. Multiplicetur AN per 600 productus erit 12.7135794 . Huic producto addatur Logarithmus fractionis $\frac{1}{960}$ nempe $97,0177288$. (nam est semiobolus pars libræ $\frac{1}{960}$) summa 109.7313082 erit Logarithmus numeri quæsiti, cumque index 109 superat indicem Unitatis novenario seu 9 , erunt in numero respondente novem figurarum loca supra locum Unitatum, & numerus ille in tabulis quæsitus invenietur major quam 5386500000 , & minor quam 5386600000 . Unus itaque semiobolus fœnori datus, finitis sexcentis Annis, pariet libras Anglicanas plures quam 5386500000 ; Cui summæ solvendæ vix par erit omnis illa Auri Argentique copia, quæ ab ipsa rerum origine ad hunc usque diem ex terrarum visceribus eruta est.

Exponat $Q\Pi$ quamvis pecuniæ summam quam post exactum integrum annum debitor creditori solvere tenetur, sed sine usurâ. Certum est si Debitor nunc totam solveret, illum amissurum jus quod habet in usuram annuam quæ ex pecunia illa prodiret; Quin & minor summa fœnori exposita, potest post annum cum sua usura, summam $Q\Pi$ adæquare. Minor illa pecuniæ summa, quæ cum sua Usura pecuniam $Q\Pi$ adæquat, præsens pecuniæ $Q\Pi$ valor dicitur. Sit AN Logarithmus Rationis quam fors habet ad aggregatum fortis & usuræ, hoc est, si fors sit Usuræ annuæ Vigecupla, sit AN Logarithmus numeri $1 + \frac{1}{20}$ seu $1,05$, & capiat QY æqualis AN ; erit AY Logarithmus præsentis valoris pecuniæ $Q\Pi$. Patet enim pecuniam YZ fœnori expositam finito anno parituram pecuniam $Q\Pi$, adeoque ut habeatur logarithmus præsentis valoris,

valoris, seu YZ ; ex Logarithmo AQ detrahi debet Logarithmus AN , & restabit AY logarithmus præsentis valoris vel YZ . Si summa $Q\pi$ non nisi post duos annos exactos debeat; à Logarithmo AQ subtrahendus est numerus $2AN$, & manebit AV logarithmus præsentis valoris, seu summæ quæ pro pecunia $Q\pi$ solvi statim debeat. Nam manifestum est pecuniam VX fœnori expositam, spatio duorum annorum, pecuniam $Q\pi$ procreaturam. Eadem ratione, si summa $Q\pi$ non nisi post tres annos debetur, à logarithmo $Q\pi$ subtrahendus erit numerus $3AN$, & qui restat AS , erit logarithmus numeri ST , seu erit ST præsens valor summæ $Q\pi$ post tres annos solvendæ. Et Universaliter, si logarithmus AN multiplicetur per numerum annorum, quibus exactis, debetur summa $Q\pi$, & productus numerus ex logarithmo AQ subducatur, hac ratione dabitur logarithmus numeri, qui erit præsens valor summæ $Q\pi$. Hinc patet si 5386500000 libræ Angl. Societati alicui finitis sexcentum annis solvendæ fuerint; tantæ pecuniæ præsentem valorem, vix unum semibolum adæquaturum.

Si in Axe Logarithmicæ ordinentur ad curvam rectæ HG EF , AB CD quæ sint proportionales, & extremitates ipsarum FH DB rectis jungantur, quæ productæ cum Axe convenient in P & K , erunt rectæ GP

AK semper æquales. Nam ob $GH:EF::AB:CD$. erit $GH:FS::AB:DR$. Sed ob æquiangula, triangula PGH HSF , Item KAB BRD æquiangula erit $PG:HS::(GH:FS::AB:DR::)KA:BR$. Quarum proportionalium consequentes HS BR æquales sunt, Antecedentes igitur PG KA æquales erunt. *Q.E.D.*

Si rectæ CD EF ad AB GH æqualiter accedant, ut tandem punctum D coincidat cum B , & punctum F cum H , rectæ DBK FHP quæ prius secabant curvam, vertentur in Tangentes BT , HV ; & rectæ AT GV semper sibi invicem æquales erunt, hoc est, portio Axis AT vel GV intercepta inter ordinatam & Tangentem quæ Subtangens dicitur, erit ubique constantis & datæ longitudinis, quæ est præcipua Logarithmicæ Proprietas. Nam

in

in diversis Logarithmicis, Subtangentes curvarum species seu formas determinabunt.

In duabus diversæ speciei Logarithmicis, ejusdem numeri Logarithmi, seu distantiae ab unitate, erunt subtangentibus suarum curvarum proportionales. Sint enim

Fig. 4. $ATMX$, sitque $AB = MN = \text{unitati}$, item
 & 5. $DC = QY$; erit AC Logarithmus numeri CD ,

in Logarithmica HD , ad MQ logarithmum numeri QY , seu ejusdem CD in Logarithmica SY , ut subtangens AT ad subtangentem MX . Concipiatur interferi inter $ABCD$ vel $NMQY$, infinitos terminos continue proportionales, in ratione AB ad ab vel MN ad mn ; & ob $AB = MN$ erit $ab = mn$. item erit $bc = no$. Et termini proportionales cum in utraque figura sint numero æquales, dividunt lineas $ACMQ$ in partes numero æquales, quarum primæ sint $AaMm$, partes itaque illæ erunt totis proportionales, hoc est erit $Aa : Mm :: AC : MQ$. Quoniam autem Triangula TAB Bcb sunt similia (nam pars curvæ Bb coincidit fere cum portione Tangentis) Item triangula XMM $No n$ sunt similia. Erit Aa vel $Bc : bc :: TA : AB$

Item est no vel $bc : No :: MN$ vel $AB : MX$.

Unde erit ex æquo, $Bc : No :: TA : MX :: Aa : Mm :: AC : MQ$. Q. E. D. Si AT vocetur a , ob $AB : AT ::$

$$bc : Bc; \text{erit } Bc = \frac{a \times bc}{AB}.$$

Hinc si detur Logarithmus numeri, qui sit unitati proximus, vel illam minimo excessu superat, dabitur Logarithmicæ subtangens, est enim excessus bc ad Logarithmum Bc ut AB unitas ad subtangentem AT . Vel etiam si sint duo quilibet numeri quam proxime æquales, erit differentia numerorum ad differentiam Logarithmorum, ut alteruter numerorum ad Subtangentem. v. gr. Si Incrementum bc sit ,00000 00000 ,00001 02255 31945 60259, & Bc vel Aa logarithmus numeri ab sit ,00000 00000 00000 44408 92098 50062. duobus his numeris & unitati inveniatur quartus proportionalis, scilicet

43429 44819 03251, is numerus dabit longitudinem subtangentis AT, quæ est subtangens Logarithmicæ quæ exhibet Logarithmos *Briggianos*.

Si Creditor Pecuniæ summam fœnori exponat, ea lege, ut singulis temporis momentis, pars proportionalis usuræ annuæ sorti annumeretur, ita scil. ut post finitum primum temporis momentum, seu exactam anni particulam indefinite exiguam, usuram poscat tempori proportionalem, quæ sorti adjecta, unâ cum ipsa, usuram pariat, finito secundo temporis momento, sorti pariter accessuram, & ita deinceps. Quæritur quantum creditori finito anno debeatur? Sit a usura annua Unitatis, seu unius libræ. & si integer Annus seu 1 dat usuram a , particula anni indefinite exigua Mm dabit usuram ipsi Mm proportionalem $Mm \times a$; & proinde si Unitas per MN exponatur, ejus incrementum primum erit $no = Mm \times a$. Per puncta Nn concipiatur Logarithmica describi, cujus Axis est OMQ. In hac curva, si portio Axis MQ tempus exponat, ordinata QY pecuniam repræsentabit quæ usque ad illud tempus, singulis momentis, proportionaliter crevit. Nam si capiantur $m / \&c. = Mm$, ordinatæ $lp \&c.$ erunt in serie continue proportionalium in ratione MN ad mn , id est crescent eâdem ratione, qua pecunia crescit.

Tangat Logarithmicam in N recta NX, ejus subtangens MX erit constans & invariabilis, & Triangulum minimum Non simile erit Triangulo XMN. At ostensum est, esse incrementum $no = Mm \times a = No \times a$ erit itaque $no : No :: No \times a : No :: a : 1$. Sed ut no ad No , ita erit NM ad MX. Quare erit, ut a ad 1, ita NM seu 1 ad

$$MX = \frac{1}{a} = \text{subtangenti.}$$

Quod si Usura annua sit pars sortis vicesima, seu si sit $a = \frac{1}{20} = ,05$, erit $MX = \frac{1}{a} = 20$.

Quia in diversis Logarithmorum formis, ejusdem numeri Logarithmi sunt Subtangentibus suarum curvarum, propor-

proportionales: si MQ tempus Annum, seu unitatem, exponat; QY erit pecunia quæ finito anno debetur. Ut verò innotescat QY; Fiat ut MX seu 20 ad 0,4342944 (qui numerus exponit subtangentem Logarithmicæ, quæ exhibet Logarithmos *Briggianos*) ita Annus, five Unitas, ad Logarithmum *Briggianum*, qui numero QY congruit; logarithmus autem ille invenietur 0,0217147 cui Respondens numerus = QY est 1,05127, cujus incrementum supra unitatem five sortem, 05127 pauxillum superat annuam usuram, 05. Adeo ut si usura annua centum librarum sit quinque libræ, usura proportionalis singulis anni momentis forti 100 adjecta, pariet tantum ad finem anni. *lib. sol. d.*

$$5 : 2 : 6 \frac{1}{2}.$$

Si quæraturs Usura ejusmodi, ut singulis momentis pars ipsius forti continue crescenti proportionalis, ad sortem accedat, ea lege ut finito Anno producat incrementum quod sit fortis pars quælibet data v. gr. vicefima. Fiat ut Log. numeri 1,05 ad 1, hoc est ut 0,0211893 ad 1;

ita Subtangens 0,4342944 ad $\frac{1}{a} = 20,49$, & erit $a = \frac{1}{20,49}$

=,0488. Nam si concipiatur pars Usuræ, 0488 momento respondens, hoc est eandem habens rationem ad ,0488 quam habet annus ad momentum, & fiat ut unitas ad illam usuræ partem, ita fors ad ejus incrementum momentaneum; quæ hac ratione continuè crescit pecunia, ad finem anni angebitur vicefima sui parte.

C A P U T VI.

De Methodo qua Henricus Briggs Logarithmos suos supputavit, ejusque Demonstratio. Vide Fig. 4.

Q Uamvis Briggs lineam Logarithmicam nusquam descripsit, quem tamen in calculo adhibuit operandi modum, modique Rationem ex contemplatione Logarithmicæ

ex evidentissime patebit. In qualibet Logarithmica
 BD sint tres ordinatæ AB *a b q s* quam proxime æqua-
 hoc est earum differentiæ exiguam admodum ad ipsas
 neas habeant rationem; Erunt Logarithmorum diffe-
 rentiæ differentiis linearum proportionales. Nam cum li-
 neæ sunt quam proxime æquales, propinquissimæ sibi in-
 tererunt, & pars curvæ Bs ab iis intercepta cum recta
 lineæ fere coincidet, certe tam prope possunt ordinatæ sibi
 invicem admoventi, ut differentia curvæ, à recta ipsam
 subtendente, habeant ad ipsam subtensam, minorem qua-
 libet datâ rationem. Triangula igitur Bc b Br s pro re-
 ctilineis assumi possunt, & erunt æquiangula. Quare est
 $br:bc::Br:Bc::Aq:Aa$: hoc est excessus linearum
 supra minimam AB, erunt logarithmorum differentiis pro-
 portionales. Hinc patet ratio istius methodi qua tam nu-
 meri quam Logarithmi per differentias & partes propor-
 tionales corriguntur. Quod si AB sit unitas, erunt nume-
 rorum logarithmi differentiis numerorum proportionales.

Si intra numeros denarium & unitatem capiatur medius
 proportionalis, seu quod idem est, numeri denarii extraha-
 tur Radix quadratica, Radix illa seu numerus in medio
 erit loco intra denarium & Unitatem. & ejus Logarith-
 mus erit dimidius Logarithmi qui denario competit ac pro-
 inde dabitur. Si inter numerum prius inventum & unita-
 tem, iterum inveniatur medius proportionalis quod fit ex-
 trahendo numeri inventi Radicem quadraticam, hic nu-
 merus Unitati duplo vicinior erit quam prior, ejusque lo-
 garithmus erit prioris logarithmi semissis, seu Logarithmi
 denario competentis pars quarta. Si hac ratione conti-
 nuo extrahatur Radix quadratica & biseentur Logarith-
 mi, pervenietur tandem ad numerum cujus distantia ab

unitate minor erit parte $\frac{1}{10000000000}$ istius lo-

garithmi qui Denario tribuitur. *Briggius* peractis 54 Ra-
 dicum extractionibus; Invenit numerum 1, 00000 00000
 00000 12781 91493 20032 3442 ejusque logarithmum
 fore 0, 00000 00000 00000 05551 11512 31257 82702.
 F suppo-

supponatur Logarithmus hic æqualis $A\ 9$ five Br , & $9\ s$ numerus radicum extractione inventus; erit differentia $r\ s$ qua unitatem superat = ,00000 00000 000
12781 91493 20032 35.

Horum numerorum ope, logarithmi reliquorum omnium inveniri poterunt ad hunc modum. Inter datum numerum (cujus logarithmus inveniendus sit) & unitatem quærantur (ut superius ostensum est) medii proportionales donec tandem inveniatur numerus tantillo unitatem superans ut unitas præcedat quindecim cyphas, quas totidem vel plures notæ significativæ sequantur. Sit numerus ille a & notæ significativæ, præfixis cyphis differentiam $b\ c$ designabunt. Deinde fiat ut differentia $r\ s$ ad differentiam $b\ c$ ita Br Logarithmus datus ad $B\ c$ vel $A\ a$ Logarithmum numeri $a\ b$; qui itaque dabitur. Hic Logarithmus toties continue duplicatus quoties extractiones factæ sunt tandem dabit Logarithmum numeri quæsitum. Hac etiam ratione Inveniri possit Subtangens Logarithmicæ nempe si fiat $r\ s : Br :: A\ B$ seu unitas : $A\ T$ subtangenti, quæ itaque invenietur 0,43429 44819 03251, per quam denique reliquorum numerorum logarithmi inveni-

Fig. 5. tescent, nempe si detur numerus quivis $N\ M$ & jusque Logarithmus & quærat alterius numeri logarithmus qui ad $N\ M$ satis accedat fiat ut $N\ M$ ad subtangentem $X\ M$ ita $n\ o$ differentia numerorum ad $N\ o$ differentiam Logarithmorum. Quod si $N\ M$ sit Unitas = $A\ B$ dabuntur logarithmi multiplicando differentias minimas $b\ c$ per subtangentem constantem $A\ T$.

Hac ratione Invenientur Logarithmi numerorum 2 3 & 7, & inde dabuntur Logarithmi numerorum 4 8 16 32 64 &c. 9 27 81 243 &c. item 7 49 343 &c. Si à logarithmo denarii auferatur binarii Logarithmus restabit logarithmus Quinarii. & proinde dabuntur Logarithmi numerorum 25 125 625 &c.

Numeri ex his compositi, nempe 6 12 14 15 18 20 21 24 28 &c. facile logarithmis suis instruuntur, addendo logarithmos numerorum componentium.

At numerorum primorum logarithmos, per tot Radicum

cum extractiones Invenire, molestum admodum & laboriosum fuit opus. Nec quidem facile fuit, interpolando per differentias Primas, Secundas, & Tertias &c. Logarithmos supputare. Quo itaque absque tanta molestia Numerorum logarithmi obtineantur, Magni viri *Newtonus*, *Mercator*, *Gregorius*, *Wallisius*, & nuper *Halleius* series infinitas convergentes dederunt, quibus expeditius & certius logarithmi, ad quot volueris loca supputati haberi possunt; De hisce seriebus, eruditum Tractatum scripsit peritissimus Geometra *Halleius* inter Acta Philosophica Societatis Regiæ extantem, ubi series illas nova methodo demonstrat, modumque computandi logarithmos per eas docuit. Liceat hic subjungere novam seriem, ex qua expedite & facile fluunt Logarithmi saltem pro numeris majoribus.

Sit z numerus impar, cujus quæritur Logarithmus, Numeri $z-1$ & $z+1$ erunt pares, & proinde dabuntur eorum logarithmi, & Logarithmorum differentia, quæ dicatur y ; Quin etiam datur Logarithmus numeri qui est medius Geometricus inter numeros $z-1$ & $z+1$ æqualis

scil. semisummæ logarithmorum. Series $y \times \frac{1}{4z} + \frac{1}{24z^3} + \frac{7}{360z^5} + \frac{181}{15120z^7} + \frac{13}{25200z^9}$ &c. erit æqualis logarithmo Rationis quam habet Geometricus medius inter numeros $z-1$ & $z+1$ ad Arithmeticum medium scil. numerum z .

Si Numerus superat 1000, Primus seriei terminus $\frac{y}{4z}$ sufficit ad producendum logarithmum ad tredecim vel quatuordecim notarum loca, secundus terminus dabit logarithmi loca viginti. At si z major sit quam 10000, primus terminus Logarithmum exhibet ad octodecim figurarum loca, & hinc ejus usus optimus erit, in supplendis logarithmis Chiliadum à *Briggio* prætermittis; Hujus rei capiamus exemplum, sit inveniendus logarithmus numeri 20001. Logarithmus numeri 20000 idem est ac logarithmus

mus binarii præfixo Indice 4. & differentia Logarithmorum 20000 & 20002, idem est ac differentia Logarithmorum pro numeris 1000 & 10001, scil. 0,00004 34272 7687. Hæc differentia si per 4 z seu 80004 dividatur

Quotiens $\frac{1}{4z}$ erit — — — 0,00000 00005 42813

Huic quoto addatur log. numeri Geometrici medii, summa 4,30105 17093 02416

erit Logarithmus numeri 20001. Hinc patet, ut habeatur logarithmus ad quatuordecim loca non opus esse producere quatum ultra sex loca. At si logarithmus ad decem tantum figurarum loca habere velis, ut à *Vlacquo* in suis Tabulis factum est, duæ primæ quotientis notæ sufficiunt. Et si hac methodo computentur Logarithmi pro numeris supra 20000; labor omnis vix pluris erit, quam qui in exscribendis numeris impenditur. Hæc Series ex iis quæ ab *Halleio* inventæ sunt, facile sequitur, qui autem plura de iis scire cupit, Præfatum Tractatum adeat & discat.



F I N I S.

th-
lo-
04
tur
813
416
230
bea-
pro-
de-
o in
uffi-
pro
uam
ex iis
utem
ifcat.

II

Fig. 1.

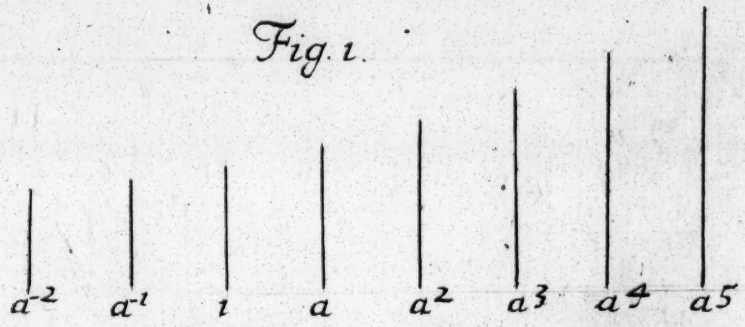


Fig. 2.

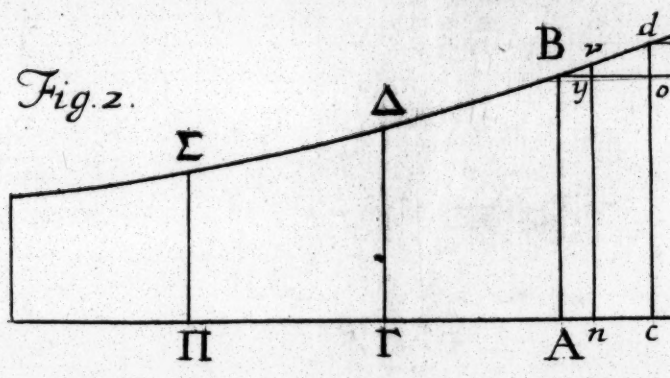
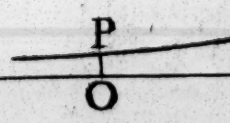


Fig. 3.



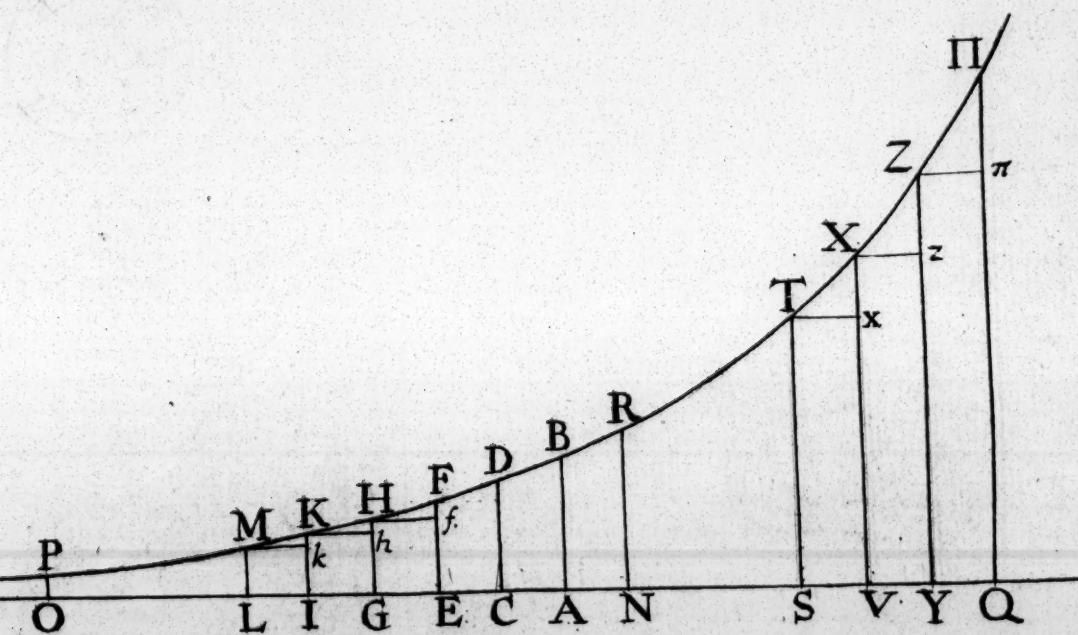
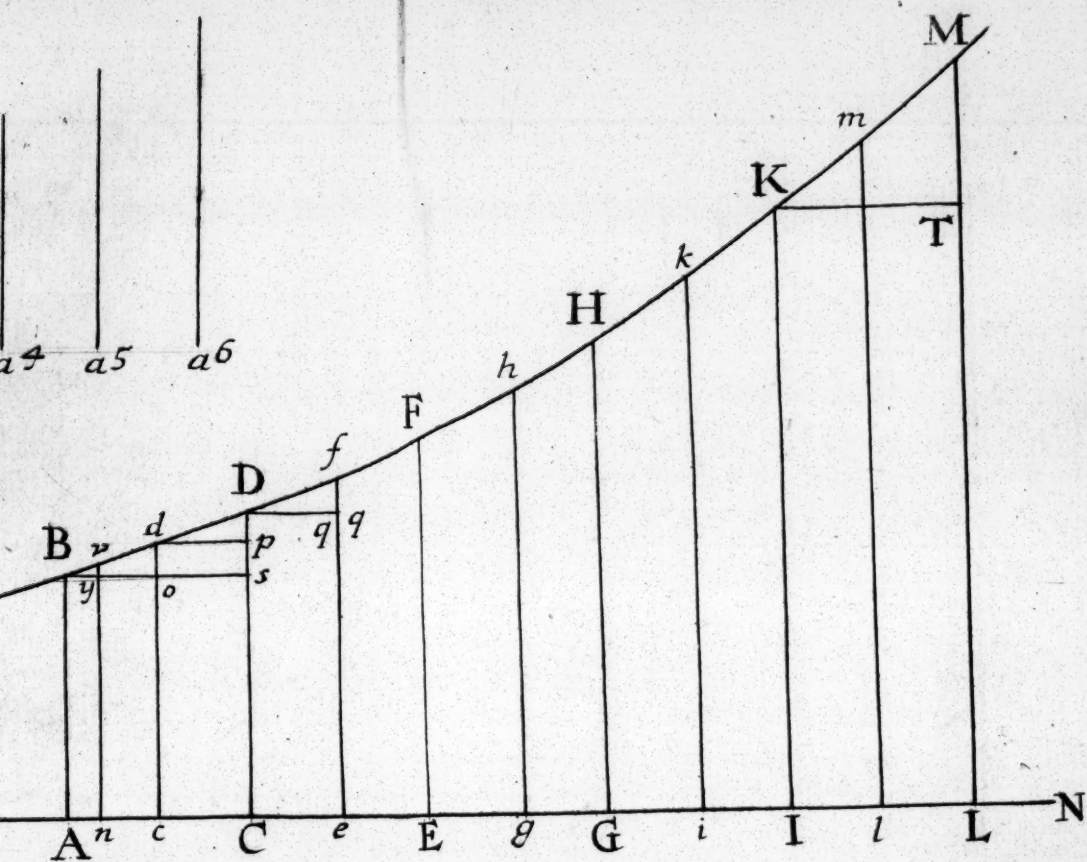


Fig. 4.

V P

Fig. 5.

O

S

